

---

# Über die Existenz inhomogener Phasen im Nambu-Jona-Lasinio Modell

---

On the existence of inhomogenous phases in the Nambu-Jona-Lasinio model  
Bachelor-Thesis von Maurice Weiler  
13. Februar 2015



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich Physik  
Institut für Kernphysik  
Strongly Interacting Fermions

Über die Existenz inhomogener Phasen im Nambu-Jona-Lasinio Modell  
On the existence of inhomogenous phases in the Nambu-Jona-Lasinio model

Vorgelegte Bachelor-Thesis von Maurice Weiler

1. Gutachten: Prof. Dr. Jens Braun
2. Gutachten: Dipl.-Phys. Dietrich Roscher

Tag der Einreichung:

---

# Erklärung zur Bachelor-Thesis

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 13. Februar 2015

---

(Maurice Weiler)

---

## Zusammenfassung

Diese Arbeit untersucht die spontane Brechung der chiralen Symmetrie stark wechselwirkender Materie im Limes einer großen Anzahl an Farbfreiheitsgraden. Als effektives Niederenergie-Modell der Quantenchromodynamik wird das Nambu-Jona-Lasinio Modell verwendet. In Abhängigkeit der Temperatur und des chemischen Potentials finden wir die Bildung eines Quark-Antiquark Kondensats, welches für die chirale Symmetriebrechung verantwortlich ist. Für dieses Kondensat muss ein Ansatz gewählt werden.

Eine homogene Wahl führt auf ein Phasendiagramm, in welchem wir einen Phasenübergang zweiter Ordnung zwischen der chiral symmetrischen und der spontan gebrochenen Phase beobachten. Abhängig von den Parametern kann dieser Übergang an einem kritischen Punkt in einen Phasenübergang erster Ordnung übergehen.

Als zweiten Ansatz wählen wir eine chirale Dichtewelle. Zur Berechnung des zugehörigen Phasendiagramms wird ein sogenannter „*fermion doubling trick*“ verwendet. Mit diesem ist es möglich, die Existenz einer inhomogenen Phase im Nambu-Jona-Lasinio Modell zu bestätigen.

## Abstract

In this thesis we investigate spontaneous chiral symmetry breaking in strongly interacting matter in the limit of a large number of colours. The Nambu-Jona-Lasinio model is used as an effective low-energy-model of quantum chromodynamics. As a function of temperature and chemical potential we find the emergence of a quark-antiquark condensate associated with chiral symmetry breaking. For our explicit studies, it is necessary to choose an ansatz for this condensate.

A homogeneous choice leads to a phase diagram with a second order phase transition between the chirally symmetric and the spontaneously broken phase. Depending on the cutoff scale the transition line between these phases can change into a transition of first order at a critical point.

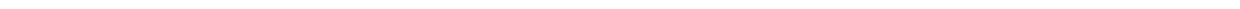
For an inhomogeneous ansatz we choose a chiral density wave. In order to calculate the corresponding phase diagram, we make use of a so called „*fermion doubling trick*“. This allows to prove the existence of an inhomogenous phase in the Nambu-Jona-Lasinio model.

---

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Methodik und physikalische Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Die Pfadintegral-Formulierung von Quantentheorien . . . . .	2
2.2	Spontane Symmetriebrechung . . . . .	5
2.3	Effektive Wirkung . . . . .	6
2.4	Thermische Quantenfeldtheorie . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Aspekte der QCD und das NJL-Modell</b>	<b>11</b>
3.1	Quantenchromodynamik und Phänomenologie der chiralen Symmetrie . . . . .	11
3.2	Das NJL-Modell . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Berechnung des Phasendiagramms</b>	<b>15</b>
4.1	Das NJL-Modell bei endlichen Temperaturen . . . . .	15
4.2	Berechnung des Phasendiagramms mit einem homogenen Ansatz . . . . .	16
4.3	Berechnung des Phasendiagramms mit einem inhomogenen Ansatz . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>29</b>
<b>A</b>	<b>Konventionen</b>	<b>30</b>
<b>B</b>	<b>Nebenrechnungen</b>	<b>31</b>
B.1	Berechnung der im homogenen Fall auftretenden Determinante . . . . .	31
B.2	Berechnung der Matsubarasumme . . . . .	31
B.3	Berechnung der Ableitung des effektiven Potentials im inhomogenen Fall . . . . .	33



---

# 1 Einleitung

*“Das was aus Bestandteilen so zusammengesetzt ist, daß es ein einheitliches Ganzes bildet, nicht nach Art eines Haufens, sondern wie eine Silbe, das ist offenbar mehr als bloß die Summe seiner Bestandteile. Eine Silbe ist nicht die Summe ihrer Laute; ba ist nicht dasselbe wie b plus a, und Fleisch ist nicht dasselbe wie Feuer plus Erde. Denn zerlegt man sie, so ist das eine, das Fleisch und die Silbe, nicht mehr vorhanden, aber wohl das andere, die Laute, oder Feuer und Erde.”*

Aristoteles: Metaphysik VII, 1041 b

Aus der makroskopischen Welt ist uns vertraut, dass sich die Masse eines Gegenstands aus der Summe der Massen seiner Bestandteile berechnet. Dieses Konzept scheint auf mikroskopischer Skala nicht länger zu gelten. Die Massen der Hadronen, gebundene Zustände aus Quarks, übersteigen die Massen ihrer Konstituenten teilweise erheblich. Ein Proton zum Beispiel hat eine Masse von etwa 1000 MeV, die drei Quarks, aus denen das Proton besteht, haben Massen von nur etwa 5 MeV. In diesem Sinn ist das Ganze also mehr als die Summe seiner Bestandteile.

Die „fehlende“ Masse in obiger Rechnung scheint dynamisch erzeugt zu werden. Als Eichtheorie der starken Wechselwirkung zwischen den Quarks sollte die Quantenchromodynamik (QCD) diesen Effekt erklären können. Da die Kopplungskonstante der QCD mit sinkender Impulsskala allerdings wächst, ist ein perturbativer Zugang zur QCD nur zur Berechnung hochenergetischer Prozesse möglich. Für den niedereenergetischen Bereich, also etwa für die Beschreibung hadronischer Materie, müssen nichtperturbative Lösungsansätze herangezogen werden.

In der vorliegenden Arbeit wird das Nambu-Jona-Lasinio-Modell (NJL-Modell) als effektives Niederenergie-Modell der QCD verwendet. Beide Theorien sind im Limes masseloser Quarks chiral symmetrisch. Durch die spontane Brechung der chiralen Symmetrie bildet sich ein Quark-Antiquark Kondensat. Die Wechselwirkung der Quarks mit dem Kondensat verleiht diesen eine effektive Masse, deren Betrag durch den Erwartungswert des Kondensats gegeben ist. Dieser Erwartungswert stellt bei endlicher Temperatur und chemischem Potential einen Ordnungsparameter für den Übergang von der chiral symmetrischen zur chiral gebrochenen Phase dar.

Ziel dieser Arbeit ist es, das zugehörige Phasendiagramm zu berechnen. In einem ersten Ansatz wird dazu ein homogenes Kondensat angenommen, später wird ein inhomogener Ansatz gewählt um die Existenz inhomogener Phasen nachzuweisen. Um die Rechnung mit dem inhomogenen Ansatz durchzuführen, wird ein „fermion doubling trick“ (siehe Ref. [1]), ein für das verwandte Gross-Neveu-Modell in 1+1 Raumzeitdimensionen entwickeltes Verfahren, auf das NJL-Modell übertragen.

Der erste Teil der Arbeit fasst die für die späteren Berechnungen nötigen Methoden und die physikalischen Grundlagen zusammen. Im zweiten Teil werden zunächst einige Aspekte der QCD aufgezeigt. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Phänomenologie der chiralen Symmetrie. Anschließend wird das NJL-Modell als effektives Modell der QCD motiviert und eingeführt. Im letzten Teil wird das NJL-Modell bei endlichen Temperaturen und chemischem Potential verwendet, um das Phasendiagramm zu berechnen.

---

## 2 Methodik und physikalische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die für die späteren Berechnungen nötigen physikalischen und methodischen Grundlagen gelegt. Zunächst wird der Pfadintegral-Formalismus, der durch die gesamte Arbeit verwendet wird, eingeführt. Danach wird das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung erläutert und die effektive Wirkung zu ihrer Untersuchung in Quantenfeldtheorien motiviert. Abschließend werden die Methoden der Statistischen Physik auf die Feldtheorie übertragen, um Aussagen bei endlicher Temperatur und chemischem Potential treffen zu können.

Auf genauere Referenzierung wurde in diesem Abschnitt verzichtet, da die Methoden bekannt und allgemein akzeptiert sind. Sie sind der gängigen Literatur, im Wesentlichen [2, 3, 4, 5, 6, 7] und [8], sowie Vorlesungsskripten entnommen.

---

### 2.1 Die Pfadintegral-Formulierung von Quantentheorien

---

Der gewöhnliche Zugang zur Quantenmechanik ist die kanonische Quantisierung der klassischen Mechanik. Hierbei werden physikalische Observablen unter Postulierung von Kommutatorrelationen zu Operatoren erhoben. Die Methode der Pfadintegration ist eine alternative Formulierung der Quantentheorien. Prinzipiell ist die Pfadintegral-Formulierung äquivalent zum Operatorformalismus, sie bringt aber speziell in der Anwendung auf Quantenfeldtheorien Vorteile mit sich.

Im Folgenden wird die Motivation und Herleitung des Pfadintegrals der Übersichtlichkeit halber anhand eines Punktquants in einer Dimension wiedergegeben. Die Ergebnisse werden anschließend auf Quantenfelder übertragen.

#### Herleitung des Pfadintegrals in der Quantenmechanik

Die gesamte Information über den Zustand des Punktquants ist in dessen Wellenfunktion  $\psi(q, t) = \langle q, t | \psi \rangle_H$  kodiert, wobei  $|\psi\rangle_H$  der Zustandsvektor im Heisenbergbild ist. Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t'$  kann formal über ein Integral

$$\psi(q', t') = \langle q', t' | \psi \rangle_H = \int dq \langle q', t' | q, t \rangle \langle q, t | \psi \rangle_H = \int dq U(q, q', t' - t) \psi(q, t) \quad (2.1)$$

aus dem Zustand zum Zeitpunkt  $t$  berechnet werden. Das Problem der Zeitentwicklung reduziert sich also auf die Berechnung der Übergangsamplitude

$$U(q, q', t' - t) := \langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | q \rangle, \quad (2.2)$$

die auch als Feynman-Kern bezeichnet wird.<sup>1</sup> Hierbei steht  $|q\rangle$  für den Ortseigenzustand im Heisenbergbild, der mit dem Zustand im Schrödingerbild über die Zeitentwicklung  $|q, t\rangle = e^{i\hat{H}t} |q\rangle$  zusammenhängt. In Formel (2.1) wurde die Darstellung

$$\mathbb{1} = \int dq |q, t\rangle \langle q, t| \quad (2.3)$$

der Identität verwendet.

---

<sup>1</sup> In der gesamten Arbeit wird, wenn nicht explizit anders gesagt, das natürliche Einheitensystem verwendet.

Zur Berechnung des Feynman-Kerns wird das Zeitintervall  $t' - t = N\epsilon$  in  $N$  äquidistante Zeitintervalle der Länge  $\epsilon$  zerlegt, sodass die Zeitentwicklung in ein Produkt  $\prod_{k=1}^N e^{-i\hat{H}\epsilon}$  von  $N$  Operatoren zerfällt. Durch Einschleiben der Identität (2.3) zu den Zeitpunkten  $t_k = t + k\epsilon$ ,  $1 \leq k \leq N-1$ , zwischen die Operatoren folgt:

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle &= \int dq_{N-1} \dots \int dq_2 \int dq_1 \langle q', t' | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q, t \rangle \\ &= \int dq_{N-1} \dots \int dq_2 \int dq_1 \langle q' | e^{-i\hat{H}\epsilon} | q_{N-1} \rangle \dots \langle q_2 | e^{-i\hat{H}\epsilon} | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-i\hat{H}\epsilon} | q \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Anschaulich kann das Punktquant also über beliebige Zwischenzustände zu den Zeiten  $t_k$  von dem Anfangszustand zum Endzustand übergehen. Im Fall der Quantenmechanik in der Ortsdarstellung beschreibt dieser Übergang zwischen den Zuständen einen Pfad, daher die Bezeichnung Pfadintegral.

Auf den ersten Blick ist durch das Einfügen der Zwischenzustände nichts gewonnen, da nun die Übergangsamplituden  $U(q_{k+1}, q_k, \epsilon)$  berechnet werden müssen. Allerdings ist bei explizitem Ausschreiben des Zeitentwicklungsoperators

$$e^{-i\hat{H}\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\hat{H}\epsilon)^n \xrightarrow{\epsilon \ll 1} 1 - i\hat{H}\epsilon \quad (2.5)$$

erkennbar, dass dieser für große  $N$  und entsprechend kleine  $\epsilon = \frac{t'-t}{N}$  nach dem linearen Glied abgebrochen werden kann. In die Übergangsamplituden  $U(q_{k+1}, q_k, \epsilon)$  im Limes großer  $N$  kann nun die Identität  $\mathbb{1} = \int \frac{dp_k}{2\pi} |p_k\rangle \langle p_k|$  im Impulsraum eingeschoben werden:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} U(q_{k+1}, q_k, \epsilon) &= \int \frac{dp_k}{2\pi} \langle q_{k+1} | p_k \rangle \langle p_k | 1 - i\epsilon \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q_k \rangle \\ &= \int \frac{dp_k}{2\pi} \langle q_{k+1} | p_k \rangle \langle p_k | q_k \rangle (1 - i\epsilon H(p_k, q_k)) \\ &= \int \frac{dp_k}{2\pi} e^{ip_k(q_{k+1} - q_k)} (1 - i\epsilon H(p_k, q_k)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Im Schritt von der zweiten zur dritten Zeile wurde der Ausdruck  $\langle p_k | q_k \rangle = e^{-ip_k q_k}$  für den Überlapp zwischen Orts- und Impulszustand verwendet. Von der ersten zur zweiten Zeile wurde angenommen, dass  $\langle p_k | \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q_k \rangle = \langle p_k | q_k \rangle H(p_k, q_k)$  gilt.<sup>2</sup> Durch Einsetzen der Übergangsamplituden (2.6) in den ursprünglichen Feynman-Kern (2.4) folgt

$$\begin{aligned} \langle q', t' | q, t \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left( \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \right) \left( \prod_{k=0}^{N-1} \frac{dp_k}{2\pi} \right) \exp \left( i\epsilon \sum_{k=0}^{N-1} p_k \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} \right) \prod_{n=0}^{N-1} (1 - i\epsilon H(p_k, q_k)) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left( \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \right) \left( \prod_{k=0}^{N-1} \frac{dp_k}{2\pi} \right) \exp \left( i\epsilon \sum_{k=0}^{N-1} \left( p_k \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} - H(p_k, q_k) \right) \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei von dem Grenzwert  $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{x_n}{N} \right) = \exp \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \right)$  mit  $\frac{x_n}{N} = \frac{-iH(t'-t)}{N} = -iH\epsilon$  Gebrauch gemacht wurde. Im Limes großer  $N$  gehen die diskreten Orts- und Impulskoordinaten in kontinuierliche

<sup>2</sup> Dieser Schritt ist zunächst nur dann formal richtig, wenn alle Impulsoperatoren im Hamiltonoperator links von den Ortsoperatoren stehen, da die Operatoren dann direkt auf die zugehörigen Eigenzustände wirken können. Weil die Reihenfolge der Orts- und Impulsvariablen in der Hamiltonfunktion irrelevant ist, ist die Reihenfolge der Orts- und Impulsoperatoren nach der kanonischen Quantisierung nicht eindeutig definiert. Die am wenigsten willkürliche Wahl ist durch die Weylsche Operatorordnung, bei der über alle möglichen Reihenfolgen gemittelt wird, gegeben. Im Limes großer  $N$  kann gezeigt werden, dass die Wahl der Weylschen Operatorordnung die oben genannte Annahme rechtfertigt.

Funktionen, der Differenzenquotient in eine Zeitableitung und die Summe in ein Integral über. Für die Integration über die diskreten Orts- bzw. Impulskoordinaten wird in diesem Grenzwert die Notation

$$\int \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \longrightarrow \int \mathcal{D}q, \quad \int \prod_{k=0}^{N-1} \frac{dp_k}{2\pi} \longrightarrow \int \mathcal{D}p \quad (2.8)$$

eingeführt. Diese Pfad- oder Funktionalintegrale können als Integrale über einen Funktionenraum angesehen werden. Für explizite Rechnungen wird allerdings auf die diskrete Version zurückgegriffen, der Grenzübergang wird erst nach der Integration ausgeführt.

Insgesamt ergibt sich der Feynman-Kern zu

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \exp \left( i \int_t^{t'} dt'' (p\dot{q} - H(p, q)) \right) \quad (2.9)$$

mit den Integrationsgrenzen  $q(t) = q$  und  $q(t') = q'$ . Der Ausdruck  $p\dot{q} - H(p, q)$  darf nicht mit der Lagrangefunktion verwechselt werden, da  $p$  nicht als kanonisch konjugierter Impuls zu  $q$  eingeführt wurde sondern ein unabhängiger Parameter ist.

Das Superpositionsprinzip der Quantenmechanik wird in Formel (2.9) gut sichtbar. Ähnlich wie bei dem Doppelspaltexperiment, bei dem die Wege durch beide Spalte berücksichtigt werden, werden im Pfadintegral-Formalismus alle möglichen Pfade, auf denen das Punktquant von einem Anfangs- in einen Endzustand übergehen kann, berücksichtigt.

Im Pfadintegral-Formalismus treten keine Operatoren mehr auf, da diese ähnlich wie der Hamiltonoperator durch die zugehörigen klassischen Funktionen ausgedrückt werden.

### Das Pfadintegral in der Quantenfeldtheorie

Die Herleitung des Pfadintegrals kann ohne weiteres auf die Quantenfeldtheorie übertragen werden. Dazu wird das Quantenfeld in einem endlichen Volumen betrachtet und räumlich diskretisiert, also durch ein Gitter von Stützstellen ausgedrückt. Für die endlich vielen Freiheitsgrade auf dem Gitter kann ähnlich wie in der obigen Herleitung vorgegangen werden. Im Kontinuumslimit, also für eine verschwindend kleine Gitterkonstante, und im Limes unendlich großen Volumens folgt

$$\langle \phi', t' | \phi, t \rangle = \langle \phi' | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | \phi \rangle = \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \left( i \int_t^{t'} dt'' \int d^d x (\pi\dot{\phi} - \mathcal{H}(\pi, \phi)) \right) \quad (2.10)$$

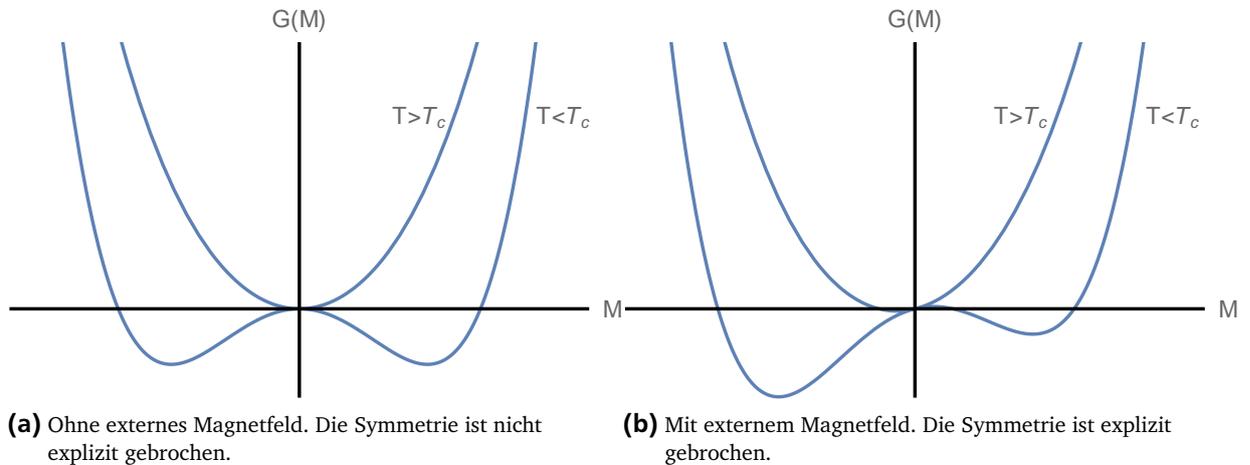
als Ausdruck für den Feynman-Kern eines Skalarfeldes in  $d$  Dimensionen. Die Randbedingungen sind wieder  $\phi(t) = \phi$  und  $\phi(t') = \phi'$ . Zur expliziten Berechnung eines Pfadintegrals<sup>3</sup> in der Quantenfeldtheorie wird wieder auf die diskrete Version, hier auch im Ortsraum, zurückgegriffen.

Gewöhnlich tritt das Impulsdichtefeld  $\pi$  quadratisch in der Hamiltondichte auf. Durch quadratische Ergänzung kann das Pfadintegral über das Impulsdichtefeld auf die Form eines Gaußintegrals<sup>4</sup> gebracht und ausgewertet werden. Es resultiert Feynmans Form des Pfadintegrals

$$\langle \phi', t' | \phi, t \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left( i \int_t^{t'} dt'' \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) \right) \quad (2.11)$$

<sup>3</sup> Da die Freiheitsgrade, über welche im Fall eines Quantenfeldes integriert wird, keine Ortskoordinaten mehr sind, ist die Bezeichnung „Pfadintegral“ in der Quantenfeldtheorie ad absurdum geführt. Das Pfadintegral beschreibt hier keinen Pfad mehr, auf dem ein Teilchen propagiert, sondern es beschreibt, über welche Feldkonfigurationen das Feld von dem Anfangs- in den Endzustand übergeht.

<sup>4</sup> Das Gaußsche Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$  kann durch analytische Fortsetzung bezüglich  $a$  auf die komplexe Ebene verallgemeinert werden.



**Abbildung 2.1.:** Gibbs'sche Energie eines Ferromagneten in Abhängigkeit des Magnetfeldes.

mit einer irrelevanten Normierungskonstante  $\mathcal{N}$ .

Ein wichtiger Spezialfall ist das Pfadintegral über Fermionenfelder. Die Eigenschaft der Feldoperatoren zu antikommutieren überträgt sich auf deren Eigenwerte. Die Fermionenfelder sind also graßmannwertig

$$\{\psi_i^{(*)}(x), \psi_j^{(*)}(y)\} = 0, \quad (2.12)$$

d.h. sie sind antikommutierend definiert. Für die Praxis wichtig ist das Gaußsche Integral

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\bar{\psi} \int \mathcal{D}\psi \exp \left[ - \int d^D x' d^D x \bar{\psi}(x') A(x', x) \psi(x) + \int d^4 x (\bar{\psi}(x) \rho(x) + \bar{\rho}(x) \psi(x)) \right] \\ &= \det(A) \exp \left[ \int d^4 x' d^4 x \bar{\rho}(x') A^{-1}(x', x) \rho(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die Integrale über  $\psi$  und  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  sind unabhängig voneinander, da  $i\psi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)}$  das kanonisch konjugierte Feld zu  $\psi$  ist.

## 2.2 Spontane Symmetriebrechung

Unter einer Symmetrie versteht man in der Physik die Invarianz eines Systems unter einer Transformation. Symmetrien spielen bei der Modellbildung eine wichtige Rolle - werden experimentell Symmetrien beobachtet, muss auch die das System beschreibende Theorie invariant unter der entsprechenden Symmetrie sein. Umgekehrt gilt dieses Prinzip allerdings nicht. Die Symmetrien einer Theorie müssen in deren Grundzustand nicht realisiert sein, man spricht dann von spontaner Symmetriebrechung. In diesem Fall ist der Grundzustand degeneriert, durch die Symmetrietransformation gehen die degenerierten Zustände ineinander über. Da diese Zustände niedrigster Energie gleichberechtigt sind, muss das System beim Übergang in den Grundzustand spontan einen Zustand wählen, wodurch die Symmetrie gebrochen wird.

Der Ferromagnet ist ein Beispiel für ein System, in dem die Symmetrie spontan gebrochen sein kann. Die Spin-Spin-Wechselwirkung der Atome ist rotationsinvariant. Oberhalb der Curie-Temperatur  $T_c$  bildet sich keine spontane Magnetisierung, der Grundzustand ist damit rotationssymmetrisch. Fällt die Temperatur allerdings unter die Curie-Temperatur, wird es für die Atome energetisch günstiger, sich aneinander auszurichten, sodass der Ferromagnet magnetisiert und die Rotationssymmetrie gebrochen wird. In Abbildung 2.1a ist der qualitative Verlauf der Gibbs'schen Energie eines Ferromagneten für die Fälle  $T < T_c$  bzw.  $T > T_c$  in Abwesenheit eines externen Magnetfeldes skizziert. Für  $T < T_c$  liegt das Minimum der

Gibbs'schen Energie und damit der Grundzustand nicht mehr bei  $M = 0$  sondern bei  $M = \pm M_0$  und die Symmetrie ist spontan gebrochen. Die Magnetisierung  $M_0$  des Systems im Grundzustand ist der Ordnungsparameter, der den Phasenübergang zwischen der paramagnetischen und der ferromagnetischen Phase anzeigt. Abbildung 2.1b zeigt die Gibbs'schen Energie des Ferromagneten bei Anwesenheit eines externen Magnetfeldes. In diesem Fall ist die Symmetrie zusätzlich explizit gebrochen.

Es bleibt die Frage, wie sich eine spontan gebrochene Symmetrie in der Quantenfeldtheorie äußert. Die Menge der Symmetrietransformationen eines Systems bildet zusammen mit deren Verknüpfung untereinander eine Symmetriegruppe. Für kontinuierliche globale Symmetrien, die hier betrachtet werden sollen, ist die Symmetriegruppe eine Lie-Gruppe, deren Elemente die Operatoren  $U(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  sind. Nach dem Noethertheorem folgt aus jeder kontinuierlichen Symmetrie einer Lagrangedichte ein erhaltener Strom  $j_\mu^k(x)$  und damit eine erhaltene Ladung  $Q_k = \int d^d x j_0^k(x)$ . Diese Ladung ist der Generator der Symmetrietransformation:

$$U(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = e^{-i \sum_k \alpha_k Q_k}. \quad (2.14)$$

Man unterscheidet die beiden Fälle

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha_k Q_k} |0\rangle &= |0\rangle &\Leftrightarrow Q^k |0\rangle &= 0 &\quad \forall k \\ e^{-i\alpha_k Q_k} |0\rangle &\neq |0\rangle &\Leftrightarrow Q^k |0\rangle &\neq 0 &\quad \text{sonst,} \end{aligned} \quad (2.15)$$

wobei in dem Term  $\alpha_k Q_k$  ein festes  $k$  gemeint ist, es wird nicht gemäß der Summenkonvention über  $k$  summiert. Im ersten Fall spricht man von der Wignerphase, in welcher der Grundzustand symmetrisch ist. Im zweiten Fall ist die Symmetrie spontan gebrochen, man spricht dann von der Nambu-Goldstone Phase. Es kann gezeigt werden, dass eine Symmetrie spontan gebrochen ist, falls der Vakuumerwartungswert des Kommutators

$$\langle 0 | [iQ_k, \phi(x)] | 0 \rangle \equiv \langle 0 | \int d^d y [i j_0^k(y), \phi(x)] | 0 \rangle \quad (2.16)$$

verschieden von Null ist. Dabei bezeichnet  $\phi$  einen Operator in der Lagrangedichte mit endlichem Träger.

Nach dem Goldstone-Theorem tritt für jeden spontan gebrochenen Generator einer kontinuierlichen Symmetrie ein masseloses, skalares Teilchen, Nambu-Goldstone-Boson genannt, auf. Die Nambu-Goldstone-Bosonen tragen dieselben Quantenzahlen wie der Generator der gebrochenen Symmetrie. Sie entsprechen einer Feldanregung in Richtung der gebrochenen Symmetrie, also in Richtung der degenerierten Grundzustände.

---

## 2.3 Effektive Wirkung

---

Zur Untersuchung der spontanen Symmetriebrechung ist es notwendig einen Formalismus zur Hand zu haben, mit dessen Hilfe der Grundzustand der Theorie gefunden werden kann. Als Zustand geringster Energie ist er im Rahmen der klassischen Feldtheorie durch das globale Minimum des Potentials charakterisiert. Diese einfache Analyse ist in der Quantenfeldtheorie so nicht mehr möglich, da zusätzlich Quantenkorrekturen berücksichtigt werden müssen. Es stellt sich allerdings heraus, dass ein Funktional existiert, durch dessen Minimierung der Grundzustand einer Quantenfeldtheorie gefunden werden kann.

### Effektive Wirkung und effektives Potential

Als aufschlussreich bei der Suche nach einem Weg, den Grundzustand einer Quantenfeldtheorie zu finden, erweisen sich deren Parallelen zur Statistischen Physik. Der Zusammenhang dieser Gebiete wird ersichtlich, wenn das erzeugende Funktional von Greenfunktionen betrachtet wird. Für skalare Felder ist es definiert als

$$Z[J] := \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^D x (\mathcal{L} + J(x) \phi(x)) \right], \quad (2.17)$$

wobei  $J(x)$  ein externes Quellfeld ist. Durch funktionales Differenzieren nach dem Quellfeld reproduziert das erzeugende Funktional die Greenfunktionen

$$\begin{aligned} G_n(x_1 \dots x_n) &= \langle 0|T[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)]|0\rangle \\ &= \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}\right] \\ &= \frac{1}{Z[0]} \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right) \dots \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right) Z[J] \Big|_{J=0}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

wobei der Faktor  $\frac{1}{Z[0]}$  eine Normierung ist. Die Form des erzeugenden Funktionals und die Tatsache, dass durch Differenzieren desselben Erwartungswerte berechnet werden können, erinnert an die Zustandssumme der Statistischen Physik. Für das Beispiel eines Spinsystems lautet die Zustandssumme

$$Z_{\text{spin}}(H) = \sum_{\{s_i\}} \exp\left(-\beta \left(H_0(\{s_i\}) - \sum_i B s_i\right)\right), \quad (2.19)$$

wobei  $s_i = \pm \frac{1}{2}$  für die Spins,  $B$  für das externe Magnetfeld und  $H_0$  für die Hamiltonfunktion ohne Berücksichtigung des Magnetfeldes steht. Ähnlich wie in Formel (2.18) berechnet sich die Magnetisierung:

$$M \equiv \frac{1}{V} \langle s_i \rangle = \frac{1}{Z_{\text{spin}}} \frac{1}{\beta V} \frac{\partial}{\partial B} Z_{\text{spin}}. \quad (2.20)$$

Diese Ähnlichkeit motiviert den Versuch, die Methoden der Statistischen Physik auf die Quantenfeldtheorie zu übertragen.

Der Grundzustand des Spinsystems ohne Einfluss des externen Magnetfeldes kann durch Minimierung der Gibbs'schen Energie ermittelt werden. Die Gibbs'sche Energie geht durch eine Legendre-Transformation der Freien Energie  $F(H) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{\text{spin}}$  bezüglich des externen Feldes hervor. Das quantenfeldtheoretische Analogon zur freien Energie ist das erzeugende Funktional zusammenhängender Greenfunktionen

$$W[J] := -i \ln(Z[J]). \quad (2.21)$$

Es generiert durch funktionales Differenzieren alle Greenfunktionen, deren Graphen untereinander verbunden sind. Man bezeichnet die erste funktionale Ableitung von  $W$ ,

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J =: \varphi[J, x], \quad (2.22)$$

als klassisches Feld. Das klassische Feld ist ein Funktional, das den Erwartungswert des Feldes  $\phi$  in Abhängigkeit der Quelle  $J$  angibt. Die Legendretransformation des erzeugenden Funktionals zusammenhängender Greenfunktionen bezüglich des Quellfeldes ergibt die effektive Wirkung

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int d^Dx J(x) \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = W[J] - \int d^Dx J \varphi, \quad (2.23)$$

die ein Funktional des klassischen Feldes ist. In Analogie zur Minimierung der Gibbs'schen Energie kann nun die Ableitung der effektiven Wirkung betrachtet werden:

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \frac{\delta W[J]}{\delta \varphi(x)} - \int d^Dy \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi(x)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} - J(x) = -J(x). \quad (2.24)$$

In Abwesenheit externer Quellen  $J(x)$  gilt

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} \Big|_{J=0} = 0, \quad (2.25)$$

die effektive Wirkung ist also extremal für den Vakuumerwartungswert  $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_0$  des Feldes.

Die effektive Wirkung ist eine extensive Größe, sie skaliert also mit der Ausdehnung des Systems. Die zugehörige intensive Größe

$$V_{\text{eff}}[\varphi] = -\frac{\Gamma[\varphi]}{VT} \quad (2.26)$$

ist das effektive Potential. Der Vakuumerwartungswert der zu dem globalen Minimum des effektiven Potentials gehört ist der gesuchte Grundzustand.

Es ist in der Regel nicht einfach, die Lösung von (2.25), also eine Funktion, die zu einem stationären Punkt der effektiven Wirkung gehört, zu finden. Beschränkt man sich bei der Suche auf einen translationsinvarianten Grundzustand, also einen konstanten Erwartungswert  $\varphi(x) = \varphi$ , geht (2.25) in

$$\frac{\partial \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.27)$$

über.

### Berechnung der effektiven Wirkung

Aus den bisherigen Überlegungen ist noch nicht klar, wie das effektive Potential berechnet werden kann. Zu diesem Zweck betrachten wir nun die Beziehung

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]} &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(W[J] - \int d^D x J\varphi\right)\right] \\ &= Z[J] e^{-\frac{i}{\hbar}\int d^D x J\varphi} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^D x (\mathcal{L}[\phi] + J(\phi - \varphi))\right], \end{aligned} \quad (2.28)$$

die aus Formel (2.23) folgt. Der Faktor  $\hbar$  wurde hierbei wieder explizit ausgeschrieben. Durch Ausdrücken des Feldes  $\phi = \varphi + \eta$  durch Fluktuationen um den Erwartungswert folgt:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]} = \int \mathcal{D}\eta \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^D x (\mathcal{L}[\varphi + \eta] + J\eta)\right]. \quad (2.29)$$

Der Hauptbeitrag des Integrals kommt von den Fluktuationen  $\eta$ , unter denen der oszillierende Exponent stationär ist, die also die Bedingung

$$\delta[\mathcal{L}[\varphi + \eta] + J\eta] = \left(\frac{\delta \mathcal{L}[\varphi]}{\delta \varphi} + J\right)\delta\eta = 0 \quad (2.30)$$

für beliebige Variationen  $\delta\eta$  erfüllen. Eine Taylorentwicklung der Lagrangedichte um den Erwartungswert liefert

$$\mathcal{L}[\varphi + \eta] = \mathcal{L}[\varphi] + \frac{\delta \mathcal{L}[\varphi]}{\delta \varphi}\eta + \mathcal{L}_{\text{h.o.}}, \quad (2.31)$$

wobei der  $\mathcal{L}_{\text{h.o.}}$  für alle Terme höherer Ordnung steht. Einsetzen der Entwicklung in (2.29) ergibt unter Berücksichtigung der Stationarität der Phase

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]} \approx e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi]} \int \mathcal{D}\eta \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^D x \mathcal{L}_{\text{h.o.}}\right] \quad (2.32)$$

und damit

$$\Gamma[\varphi] \approx S[\varphi] - i\hbar \ln\left(\int \mathcal{D}\eta \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^D x \mathcal{L}_{\text{h.o.}}\right]\right). \quad (2.33)$$

Die effektive Wirkung ist in erster Näherung durch die klassische Wirkung gegeben. Die weiteren Terme sind Schleifenkorrekturen, für die gezeigt werden kann, dass Beiträge mit  $L$  Schleifen von der Ordnung  $\mathcal{O}(\hbar^L)$  sind. Allgemein gilt für Wirkungen  $S[\phi] = N s[\phi]$ , dass die Korrekturen von der Ordnung  $\mathcal{O}(N^{-L})$  sind, im Limes  $N \rightarrow \infty$  ist damit  $\Gamma[\varphi] = S[\varphi]$  exakt.

## 2.4 Thermische Quantenfeldtheorie

In der Statistischen Physik werden aus der mikroskopischen Beschaffenheit des Systems unter Verwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik Gesetze für makroskopische Größen, die den Systemzustand beschreiben, abgeleitet. Wird als mikroskopische Theorie die Feldtheorie zugrunde gelegt, folgt die thermische Feldtheorie. Alle thermodynamischen Relationen sind aus den thermodynamischen Potentialen ableitbar, die sich wiederum aus den Zustandssummen berechnen lassen. Die großkanonische Zustandssumme ist für ein skalares Feld definiert als

$$Z = \text{Tr} \left( e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} \right) = \int d\phi \langle \phi | e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} | \phi \rangle, \quad (2.34)$$

wobei wie üblich  $\beta = \frac{1}{T}$  die inverse Temperatur bezeichnet. Dieser Ausdruck hat große Ähnlichkeit mit der Übergangsamplitude (2.10), wenn die inverse Temperatur als imaginäre Zeit  $\beta = i(t' - t)$  identifiziert wird. Der Unterschied liegt darin, dass in der thermischen Zustandssumme Anfangs- und Endzustand gleich sind und dass über diese integriert wird. Ansonsten kann die Berechnung des Pfadintegrals übernommen werden, so dass

$$\begin{aligned} Z &= \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \left( \int_0^\beta d\tau \int d^d x \left( i\pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi) + \mu \mathcal{N} \right) \right) \\ &\propto \int_{\text{periodisch}} \mathcal{D}\phi \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int d^d x (\mathcal{L}_E - \mu \mathcal{N}) \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

mit  $\tau = it$  und der Teilchendichte  $\mathcal{N}$  folgt. Im Schritt von der ersten zur zweiten Zeile wurde wieder angenommen, dass die Impulsabhängigkeit im Exponenten quadratisch ist, so dass die Impulsintegration ausgeführt werden kann. Außerdem wurde die euklidische Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_E := -\mathcal{L}(t = -i\tau) \quad (2.36)$$

eingeführt.

Die thermische Zustandssumme in Pfadintegraldarstellung (2.35) und das erzeugende Funktional (2.17) weisen eine ähnliche Struktur auf. Der Zusammenhang zwischen ihnen wird klarer, wenn das erzeugende Funktional im euklidischen Raum statt in Minkowski-Raumzeit dargestellt wird. Im Minkowski-Raum geht der Vorzeichenunterschied der zeitlichen und räumlichen Komponenten bei der Kontraktion zweier Vierervektoren, also z.B.  $x^\mu p_\mu = x_0 p_0 - x_i p_i$ , auf die Minkowski-Metrik<sup>5</sup>  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  zurück. Um den Vorzeichenunterschied auch im euklidischen Raum, charakterisiert durch die Metrik  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ , hervorzurufen, kann die Zeitkomponente rein imaginär gewählt werden, also  $(t, \vec{x}) = (-i\tau, \vec{x}_E)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ . Diese Rotation der Zeitachse ins Imaginäre, Wick-Rotation genannt, setzt voraus, dass eine analytische Fortsetzung möglich ist, also in dem überstrichenen Bereich keine Singularitäten liegen. Im Euklidischen nimmt das erzeugende Funktional von Greenfunktionen die Form

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ - \int d^D x_E (\mathcal{L}_E - J\phi) \right] \quad (2.37)$$

an, die thermische Zustandssumme und das erzeugende Funktional gehen also durch Wick-Rotation ineinander über.<sup>6</sup> Die Kopplung an ein Wärmebad der Temperatur  $T$  äußert sich dabei mathematisch darin, dass die Integration in imaginärer Zeit nur von Null bis  $\beta$  läuft.

<sup>5</sup> Hier im Fall einer vierdimensionalen Raumzeit.

<sup>6</sup> In den hier verwendeten Beispielen (2.35) und (2.37) unterscheiden sich die verallgemeinerten thermodynamischen Kräfte und zugehörigen äußeren Parameter voneinander, die allgemeine Struktur des Exponenten ist aber gleich.

Durch die Gleichheit des Anfangs- und Endzustandes in (2.34) sind die Felder periodisch mit Periodenlänge  $\beta$ , d.h. es gilt  $\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta)$ . Die Fouriertransformation der Felder

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-i(\nu_n \tau + \vec{p}\vec{x})} \phi_n(\vec{p}) \quad (2.38)$$

ist dadurch diskret im Frequenzraum. Es wird über die bosonischen Matsubarafrequenzen  $\nu_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , summiert.

Die Überlegungen lassen sich wieder auf fermionische Felder übertragen. Mit  $\pi = i\psi^\dagger$  gilt

$$\begin{aligned} Z &= \int_{\text{antiperiodisch}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left( \int_0^\beta d\tau \int d^d x \left( -\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\bar{\psi}, \psi) + \mu \mathcal{N} \right) \right) \\ &= \int_{\text{antiperiodisch}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left( \int_0^\beta d\tau \int d^d x \bar{\psi} \left( -\gamma_0 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + i\gamma_j \partial_j - m + \gamma_0 \mu \right) \psi \right) \\ &= \int_{\text{antiperiodisch}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int d^d x \mathcal{L}_E \right), \end{aligned} \quad (2.39)$$

wobei der Term, der die Teilchenzahl kontrolliert, in die euklidische Lagrangedichte absorbiert wurde. Die Teilchenzahl  $N = \int d^d x j_{U(1)}^0 = \int d^d x \psi^\dagger \psi$  entspricht der mit der globalen  $U(1)$  Symmetrie der Diractheorie verbundenen erhaltenen Ladung, Antiteilchen werden damit negativ gezählt.

Es kann gezeigt werden, dass die fermionischen Felder im Gegensatz zu den bosonischen Feldern antiperiodischen Randbedingungen in Zeitrichtung unterliegen müssen, also dass sie  $\psi(\vec{x}, 0) = -\psi(\vec{x}, \beta)$  erfüllen. Deshalb sind die fermionischen Matsubarafrequenzen durch  $\nu_n = \frac{2n+1}{\beta} \pi$  gegeben.

---

## 3 Aspekte der QCD und das NJL-Modell

---

### 3.1 Quantenchromodynamik und Phänomenologie der chiralen Symmetrie

---

Mit der ständigen Weiterentwicklung von Teilchenbeschleunigern und Detektoren wurden bis in die 1960er Jahre mehr als hundert verschiedene Hadronen gefunden. Mit dem *Eightfold Way* gelang es Gell-Mann 1961, die Hadronen nach Quantenzahlen zu klassifizieren. Durch die unabhängige Entwicklung des Quarkmodells durch Gell-Mann und Zweig im Jahr 1964 konnte der *Eightfold Way* reduktionistisch erklärt werden. Nach dem Quarkmodell sind Hadronen keine elementaren Teilchen sondern setzen sich aus drei Quarks zusammen. Quarks sind Teilchen mit Spin  $1/2$ , die neben einer elektrischen Ladung zusätzlich eine Farbladung tragen. Die heutige Fassung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik beinhaltet sechs Quarkflavour.

Die heute allgemein akzeptierte Theorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks ist die Quantenchromodynamik (QCD). Sie beschreibt die Wechselwirkung der Quarks über Gluonfelder. Als Eichtheorie der starken Wechselwirkung ist sie ein wichtiger Bestandteil des Standardmodells. Die Lagrangedichte der QCD ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}_{i,f} (i\not{D}_{ij} - m_f \delta_{ij}) \psi_{j,f} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}, \quad (3.1)$$

wobei über die sechs Flavourfreiheitsgrade  $f \in \{u, d, s, c, b, t\}$  und drei Farbfreiheitsgrade  $i, j \in \{r, g, b\}$  summiert wird [3]. Durch die kovariante Ableitung  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}$  sind die Quarkfelder  $\psi$  an die Gluonfelder  $A_\mu^a$  gekoppelt,  $\lambda^a$  steht für die acht Gell-Mann Matrizen.

Die Gluonfelder tragen selbst eine Farbladung. Da die Eichgruppe  $SU(3)$  der QCD nichtabelsch ist, sind die Strukturkonstanten  $f^{abc}$  der zugehörigen Lie-Algebra verschieden von Null, wodurch in dem Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  ein zusätzlicher Term im Vergleich zur Quantenelektrodynamik auftritt. Infolgedessen stehen in der Lagrangedichte Selbstwechselwirkungsterme der Gluonfelder. Experimentell wird beobachtet, dass die Kopplungskonstante der QCD für große Energieskalen gegen Null geht, die Quarks also asymptotisch frei sind. Qualitativ kann dieser Effekt als Anti-Polarisation des Vakuums durch die Farbladung der Gluonfelder verstanden werden, eine quantitative Beschreibung ist über die Berechnung der  $\beta$ -Funktion der Kopplungskonstante möglich [9].

Die Lagrangedichte ist invariant unter verschiedenen Symmetrietransformationen, einige davon sind allerdings nur approximativ realisiert. Exakte Symmetrien sind die lokale Eichsymmetrie  $SU(3)_c$ , die im Farbraum wirkt, und die globale  $U(1)_V$  Symmetrie, die Baryonenzahlerhaltung impliziert.

Die chirale Symmetrie  $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ , unter der die links- und rechtshändigen Anteile der Quarkfelder unabhängig voneinander transformiert werden, ist durch den Masseterm in Gleichung (3.1) explizit gebrochen. Im chiralen Limes, d.h. für verschwindende Quarkmassen ( $m_f \rightarrow 0$ ), ist die chirale Symmetrie exakt [10]. Für spätere Überlegungen bezüglich der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie ist es sinnvoller, die isomorphe Darstellung  $SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \simeq SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$  zu betrachten. Hierbei transformiert die Vektor-Symmetrie  $SU(N_f)_V$  die links- und rechtshändigen Anteile gleich, während die Axialvektor-Symmetrie  $SU(N_f)_A$  diese entgegengesetzt zueinander transformiert.

#### Chirale Symmetriebrechung

In der Realität sind die Quarkmassen zwar endlich, die Massen der beiden leichtesten Quarks  $m_u \approx 2,3 \text{ MeV}$  und  $m_d \approx 4,8 \text{ MeV}$  sind verglichen mit der relevanten Energieskala der QCD  $\Lambda_{\text{QCD}} \simeq 200 \text{ MeV}$  jedoch klein. Infolgedessen kann die  $SU(2)_V \times SU(2)_A$  Symmetrie, die nicht im vollen Flavour-Hilbertraum

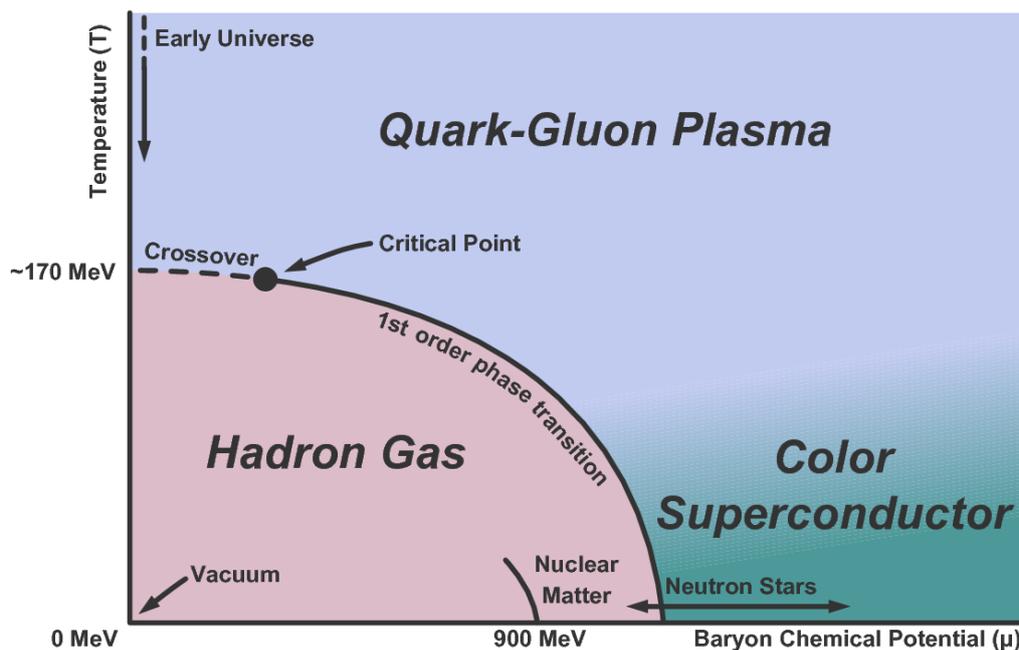


Abbildung 3.1.: Schematisches QCD-Phasendiagramm, entnommen aus Ref. [13].

wirkt sondern auf den Unterraum des Up- und Down-Quarks beschränkt ist, als näherungsweise gegeben angesehen werden [10]. Die Vektor-Symmetrie  $SU(2)_V$  ist die bekannte Isospin-Symmetrie, die sich in dem nahezu entarteten Spektrum der Isospin-Multipletts äußert. Ähnlich sollten auch durch die Axialvektor-Symmetrie  $SU(2)_A$  Entartungen im hadronischen Spektrum auftreten. Allerdings werden diese experimentell nicht beobachtet [11]. Diese Beobachtungen deuten darauf hin, dass die chirale Symmetrie in der hadronischen Phase spontan gebrochen ist und nur der Anteil der Isospin-Untergruppe als Restsymmetrie verbleibt. Da die chirale Symmetrie nicht exakt ist, treten hierbei Pseudo-Goldstone-Bosonen anstelle der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Goldstone-Bosonen auf. Diese sind zwar nicht mehr masselos, aufgrund der nur schwachen expliziten Brechung der chiralen Symmetrie jedoch vergleichsweise leicht. Phänomenologisch können die Pionen, deren Massen bei nur ungefähr  $140$  MeV liegen, als diese Pseudo-Goldstone-Bosonen identifiziert werden.

Der Grund für die spontane Brechung der chiralen Symmetrie liegt darin, dass sich ein Kondensat aus gebundenen Quark-Antiquark-Zuständen  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  bildet. Die Wechselwirkung der Quarks mit dem Kondensat verleiht diesen eine effektive Masse. Die chirale Symmetriebrechung kann also potentiell die großen Konstituentenquarkmassen von etwa  $300$  MeV im Fall des Up- bzw. Down-Quarks erklären [12].

Für hohe Temperaturen bzw. für hohes chemisches Potential wird vermutet, dass die chirale Symmetrie des Grundzustandes wiederhergestellt ist [10]. Es gibt also einen Phasenübergang bzw. Crossover zwischen einer chiral symmetrischen und einer chiral gebrochenen Phase, wobei der Ordnungsparameter durch das chirale Kondensat gegeben ist.

### Das QCD-Phasendiagramm

Eines der großen Forschungsziele der Physik der starken Wechselwirkung ist das Verständnis des QCD-Phasendiagramms. Die theoretische Beschreibung der Phasen und Phasenübergänge der stark wechselwirkenden Materie ist etwa für die Kosmologie interessant, da das Universum diese Phasen in seiner Entwicklung durchlaufen hat. In der heutigen kalten Phase des Universums treten die Quarks allen Beobachtungen zufolge nur in farbneutralen, gebundenen Zuständen, den Hadronen auf [14]. Experimente, die ultrarelativistische Schwerionenstöße untersuchen, lassen darauf schließen, dass dieser als Confinement bezeichnete Effekt für hohe Temperaturen ab etwa  $170$  MeV aufgehoben ist. Man spricht dann von einem Quark-Gluon-Plasma [15, 16]. In Abbildung (3.1) ist ein schematisches QCD-Phasendiagramm ab-

gebildet. Neben der hadronischen Phase und der Phase, in der ein Quark-Gluon-Plasma vorliegt, wird für niedrige Temperaturen und hohe chemische Potentiale eine farb-supraleitende Phase erwartet, die z.B. in Neutronensternen realisiert sein könnte. Der chirale Phasenübergang liegt zumindest für kleine Werte des chemischen Potentials nahe am Phasenübergang von hadronischer Materie zum Quark-Gluon-Plasma [17]. Wie die beiden Phasenübergänge genau zusammenhängen, wird aktuell untersucht. Da die Übergänge durch verschiedene Mechanismen zustande kommen, ist der Zusammenhang nicht trivial.

### Nichtperturbative Lösungsansätze

Das Ansteigen der Kopplungskonstante bei sinkender Impulsskala verhindert eine perturbative Berechnung der Dynamik hadronischer Materie im Rahmen der QCD. Es muss also auf nichtperturbative Methoden zurückgegriffen werden. Beispiele hierfür sind Lattice QCD [18], Large  $N$  QCD [19, 20, 21] oder die Untersuchung effektiver Feldtheorien [22].

Die grundlegende Idee effektiver Feldtheorien ist es, eine niederenergetische Näherung einer fundamentalen Theorie zu betrachten, die bestimmte Berechnungen vereinfacht oder erst möglich macht [22]. Hierbei hängen die verwendeten Freiheitsgrade sowohl von der Energieskala als auch von den betrachteten Effekten, die das Modell simulieren soll, ab. Eine effektive Feldtheorie kann konstruiert werden, indem zunächst alle Terme, die mit den relevanten Symmetrien der fundamentalen Theorie vereinbar sind, in eine effektive Lagrangedichte geschrieben werden [23]. Die Koeffizienten dieser Terme können, falls dies möglich ist, durch die zugrundeliegende Theorie berechnet oder aber an experimentelle Daten angepasst werden.

### 3.2 Das NJL-Modell

Als effektives Modell der QCD wird in dieser Arbeit das chiral symmetrische NJL-Modell in  $3 + 1$  Dimensionen verwendet. Y. Nambu und G. Jona-Lasinio stellten die erste Fassung des Modells im Jahr 1961, also noch vor der Entwicklung des Quarkmodells, vor [24]. Angelehnt an den Mechanismus, der die Bandlücke in der Theorie der Supraleitung hervorruft, erklärt das NJL-Modell den Ursprung der Masse der Nukleonen. Ursprünglich beschrieb das Modell die Wechselwirkung von Nukleonen, heute werden die in der Theorie auftretenden Fermionen als Quarks interpretiert. Die Wechselwirkung der Fermionen untereinander ist als Vier-Fermion Wechselwirkung realisiert, die Dynamik der Gluonfelder wird vernachlässigt. Effekte die direkt mit den Gluonfeldern zusammenhängen, z.B. die asymptotische Freiheit oder das Confinement, werden vom NJL-Modell nicht reproduziert.

Die Lagrangedichte des NJL Modells mit  $N$  masselosen Fermionen<sup>1</sup> lautet

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{\lambda}{2N} \left( (\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2 \right), \quad (3.2)$$

wobei der Fermionenvektor  $\psi \equiv (\psi_1, \dots, \psi_N)^T$ , der  $N$  Diracspinoren beinhaltet, eingeführt wurde. Operatoren wirken in dieser Konvention separat auf jede Komponente der Fermionenvektoren:  $\bar{\psi} A \psi \equiv \bar{\psi}_j A \psi_j$ . Ein expliziter Massenterm  $-\bar{\psi} M \psi$ , wobei  $M := \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$  die Massenmatrix ist, wurde vermieden, da dieser die chirale Symmetrie explizit bricht. Die 't Hooft Kopplung  $\lambda$  wird für beliebige  $N$  konstant gehalten.

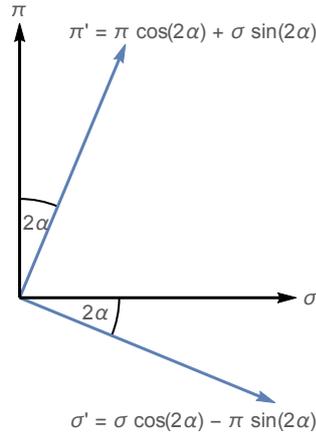
Eine globale Phasentransformation  $U(1)_V$ , unter der die Spinoren gemäß

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha_V} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{i\alpha_V}, \quad \alpha_V \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

transformieren, lässt die Lagrangedichte invariant. Sie entspricht der Vektor-Symmetrie in der QCD. Der nach dem Noethertheorem resultierende erhaltene Strom  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  stellt die Baryonenzahlerhaltung dar. Die globale Axialvektor-Symmetrie  $U(1)_A$ ,

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\gamma_5 \alpha_A} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\gamma_5 \alpha_A}, \quad \alpha_A \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

<sup>1</sup> In das NJL-Modell, wie es im Weiteren betrachtet wird, gehen keine Quark-spezifischen Eigenschaften ein. Alle Argumente sind also ohne Weiteres auf Fermionen mit Spin  $1/2$  übertragbar.



**Abbildung 3.2.:** Veranschaulichung der Rotation des skalaren und pseudoskalaren Wechselwirkungsterm, abgekürzt mit  $\sigma$  und  $\pi$ , unter der Axialvektor-Symmetrie.

lässt den kinetischen Term invariant und rotiert den skalaren und den pseudoskalaren Wechselwirkungsterm wie in Abbildung 3.2 veranschaulicht gemäß

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}\psi \cos(2\alpha) - \bar{\psi}i\gamma_5\psi \sin(2\alpha), \\ \bar{\psi}i\gamma_5\psi &\rightarrow \bar{\psi}i\gamma_5\psi \cos(2\alpha) + \bar{\psi}\psi \sin(2\alpha)\end{aligned}\quad (3.5)$$

um den Winkel  $-2\alpha$  ineinander. Die Transformation von  $\bar{\psi}$  resultiert aus der Antikommutatorrelation  $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$ :

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma_0 \\ &\rightarrow \psi^\dagger e^{i\gamma_5 \alpha_A} \gamma_0 \\ &= \psi^\dagger (\cos(\alpha_A) + i\gamma_5 \sin(\alpha_A)) \gamma_0 \\ &= \psi^\dagger \gamma_0 (\cos(\alpha_A) - i\gamma_5 \sin(\alpha_A)) \\ &= \bar{\psi} e^{-i\gamma_5 \alpha_A}.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Es wurde außerdem verwendet, dass  $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$  und  $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$  gilt. Die Lagrangedichte ist unter der Axialvektor-Symmetrie invariant, der erhaltene Axialvektorstrom lautet  $j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ . Falls die chirale Symmetrie nicht gebrochen ist, sind die Ströme links- und rechtshändiger Teilchen separat erhalten.

Die Kommutatoren

$$[iQ_5, \bar{\psi}i\gamma_5\psi(x)] = \int d^3y [\bar{\psi}i\gamma_0\gamma_5\psi(y), \bar{\psi}i\gamma_5\psi(x)] = 2\bar{\psi}\psi(x)\quad (3.7)$$

und

$$[iQ_5, \bar{\psi}\psi] = \int d^3y [\bar{\psi}i\gamma_0\gamma_5\psi(y), \bar{\psi}\psi(x)] = -2\bar{\psi}i\gamma_5\psi(x)\quad (3.8)$$

sind verschieden von Null. Falls die Vakuumerwartungswerte  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle(x)$  oder  $\langle \bar{\psi}i\gamma_5\psi \rangle(x)$  nicht verschwinden, impliziert das, wie in Abschnitt (2.2) erläutert, dass die der chiralen Ladung  $Q_5$  zugehörige Axialvektor-Symmetrie  $U(1)_A$  spontan gebrochen ist. Damit treten pseudoskalare Nambu-Goldstone-Bosonen auf. Diese müssen gebundene Fermionen-Zustände sein, da in der Lagrangedichte des NJL-Modells (3.2) keine Bosonen vorkommen.

Für hohe Temperaturen bzw. hohes chemisches Potential wird die chirale Symmetrie des Grundzustandes wiederhergestellt, das zugehörige Phasendiagramm wird im nächsten Abschnitt berechnet.

## 4 Berechnung des Phasendiagramms

### 4.1 Das NJL-Modell bei endlichen Temperaturen

Der Ausgangspunkt zur Berechnung des Phasendiagramms der chiralen Symmetriebrechung ist die Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S} \quad (4.1)$$

des NJL-Modells in euklidischer Form. Wie in Abschnitt 2.4 erklärt ist die euklidische Wirkung durch

$$S = \int_{\tau} \int_{\vec{x}} \left\{ \bar{\psi} (i\cancel{d} + i\mu\gamma_0) \psi + \frac{\lambda}{2N} \left( (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 \right) \right\} \quad (4.2)$$

gegeben, wobei wir  $\int_{\tau} \equiv \int_0^{\beta} d\tau$  und  $\int_{\vec{x}} \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3x$  schreiben, um die Notation kompakt zu halten. Die hier verwendete euklidische Konvention für die Gamma-Matrizen findet sich in Anhang A.

Der nicht-verschwindende Kommutator (3.7) impliziert, dass die chirale Symmetrie gebrochen sein kann, womit Goldstone-Bosonen auftreten würden. Zu deren Analyse führen wir mit einer Hubbard-Stratonovich-Transformation Hilfsfelder ein, indem wir die Zustandssumme mit der Identität in der Form

$$\mathbb{1} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi e^{-\frac{N}{2\lambda} \int_{\tau} \int_{\vec{x}} (\sigma^2 + \pi^2)} \quad (4.3)$$

multiplizieren. Unter dem Integral können die Felder um einen konstanten Wert verschoben werden. Durch die Wahl

$$\sigma \rightarrow \sigma + i\frac{\lambda}{N} \bar{\psi}\psi \quad \text{und} \quad \pi \rightarrow \pi + i\frac{\lambda}{N} \bar{\psi}i\gamma_5\psi \quad (4.4)$$

geht der Exponent aus (4.3) in

$$\frac{N}{2\lambda} (\sigma^2 + \pi^2) \rightarrow \frac{N}{2\lambda} (\sigma^2 + \pi^2) + i\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi - \frac{\lambda}{2N} \left( (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 \right) \quad (4.5)$$

über. Damit ist die Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi e^{-S_B} \quad (4.6)$$

partiell bosonisiert. Die bosonisierte Wirkung lautet:

$$S_B = \int_{\tau} \int_{\vec{x}} \left\{ \bar{\psi} (i\cancel{d} + i\mu\gamma_0 + i(\sigma + i\gamma_5\pi)) \psi + \frac{N}{2\lambda} (\sigma^2 + \pi^2) \right\}. \quad (4.7)$$

Durch die partielle Bosonisierung wurden die ursprünglichen Vier-Punkt-Wechselwirkungen  $\frac{\lambda}{2N} (\bar{\psi}\psi)^2$  und  $\frac{\lambda}{2N} (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2$  durch die Yukawa-artigen Wechselwirkungen  $\bar{\psi}\sigma\psi$  und  $\bar{\psi}i\gamma_5\pi\psi$  ersetzt. In der Interpretation der Fermionen als Quarks entsprechen die  $\sigma$ - und  $\pi$ -Felder den Mesonen, über die die Quarks wechselwirken.

Aus den Bewegungsgleichungen

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial (\partial_\mu \sigma)} = \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \sigma} = \frac{N}{\lambda} \sigma + i \bar{\psi} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = -i \frac{\lambda}{N} \bar{\psi} \psi \quad (4.8)$$

und

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial (\partial_\mu \pi)} = \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \pi} = \frac{N}{\lambda} \pi - \bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad \Leftrightarrow \quad \pi = \frac{\lambda}{N} \bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad (4.9)$$

folgen Ausdrücke für die  $\sigma$ - und  $\pi$ -Felder, wobei  $\sigma$  ein skalares,  $\pi$  ein pseudoskalares Feld ist. Die Felder sind invariant unter der Vektor-Symmetrie und transformieren unter der Axialvektor-Symmetrie wie (3.5). Eingesetzt in die partiell bosonisierte Wirkung führen die Ausdrücke für die  $\sigma$ - und  $\pi$ -Felder wieder auf die ursprüngliche Wirkung.

Anhand der Formeln (3.7) und (3.8) kann man sehen, dass  $\langle \phi \rangle := \sqrt{\langle \sigma \rangle^2 + \langle \pi \rangle^2}$  ein Ordnungsparameter für die chirale Symmetriebrechung ist. Im Folgenden soll dieser Vakuumerwartungswert in Abhängigkeit von der Temperatur und dem chemischen Potential erst mit einem homogenen, danach mit einem inhomogenen Ansatz berechnet werden. Dafür werden zunächst die fermionischen Freiheitsgrade ausintegriert. Anschließend wird das effektive Potential berechnet, aus dem der Grundzustand und damit die Vakuumerwartungswerte der Felder ermittelt werden.

## 4.2 Berechnung des Phasendiagramms mit einem homogenen Ansatz

### Berechnung des effektiven Potentials

Der fermionische Anteil der partiell bosonisierten Zustandssumme (4.6) kann mit der Gaußformel (2.13) für Pfadintegrale ausintegriert werden. Es folgt

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi \exp \left( -\frac{N}{2\lambda} \int_\tau \int_{\bar{x}} (\sigma^2 + \pi^2) + N \ln \det (i \not{\partial} + i \mu \gamma_0 + i (\sigma + i \gamma_5 \pi)) \right), \quad (4.10)$$

der Faktor  $N$  kommt von den  $N$  voneinander unabhängigen Fermionen, über die integriert wird.

Zur Analyse der Vakuumerwartungswerte betrachten wir die bosonischen Felder aufgespalten in Hintergrundfelder  $\bar{\sigma}$  bzw.  $\bar{\pi}$  und Fluktuationen  $\delta\sigma$  bzw.  $\delta\pi$ :

$$\sigma = \bar{\sigma} + \delta\sigma \quad \text{und} \quad \pi = \bar{\pi} + \delta\pi.$$

Physikalisch sind die Werte  $\bar{\sigma}_{\text{phys}} = \langle \sigma \rangle$  und  $\bar{\pi}_{\text{phys}} = \langle \pi \rangle$  realisiert, die sich aus der Minimierung des effektiven Potentials ergeben. Die effektive Wirkung kann, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, entwickelt werden. Da die partiell bosonisierte Wirkung proportional zu  $N$  ist, ist die effektive Wirkung im Limes  $N \rightarrow \infty$  gleich der klassischen Wirkung

$$\Gamma[\bar{\sigma}, \bar{\pi}] = \frac{N}{2\lambda} \int_\tau \int_{\bar{x}} (\bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2) - N \ln \det (i \not{\partial} + i \mu \gamma_0 + i (\bar{\sigma} + i \gamma_5 \bar{\pi})). \quad (4.11)$$

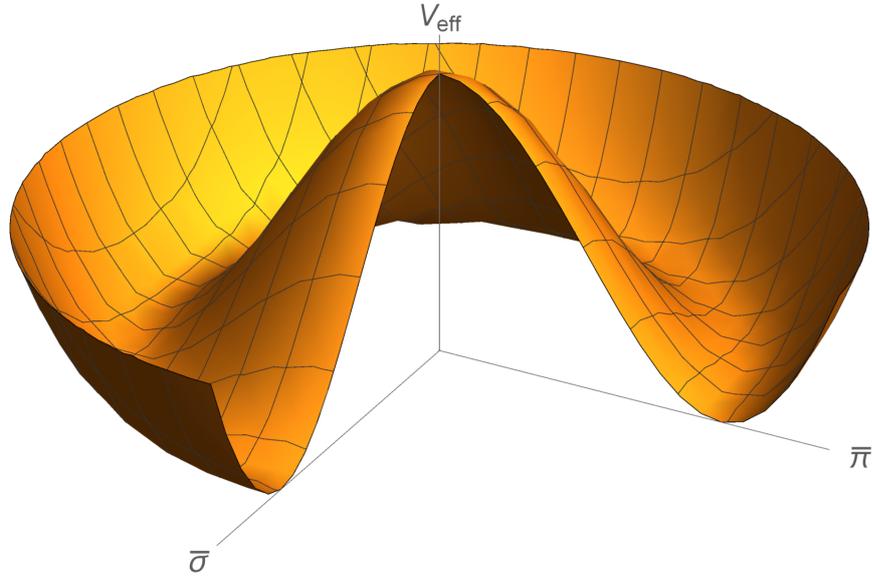
Fluktuationen sind unterdrückt. Aus der effektiven Wirkung folgt das effektive Potential

$$\frac{V_{\text{eff}}[\bar{\sigma}, \bar{\pi}]}{N} = \frac{\Gamma[\bar{\sigma}, \bar{\pi}]}{N \beta V} = \frac{1}{\beta V} \left[ \frac{1}{2\lambda} \int_\tau \int_{\bar{x}} (\bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2) - \ln \det (i \not{\partial} + i \mu \gamma_0 + i (\bar{\sigma} + i \gamma_5 \bar{\pi})) \right]. \quad (4.12)$$

Der Vorzeichenunterschied zur Definition (2.26) des effektiven Potentials in Minkowski-Raumzeit resultiert aus dem negativen Vorzeichen in der Definition (2.36) der Lagrangedichte in euklidischer Raumzeit.

Für die bosonischen Felder wählen wir nun einen homogenen Ansatz:

$$\bar{\sigma}(x) = \bar{\sigma} \quad \text{und} \quad \bar{\pi}(x) = \bar{\pi}. \quad (4.13)$$



**Abbildung 4.1.:** Effektives Potential  $V_{\text{eff}}$  für niedriges  $T$  und  $\mu$ .

In Anhang B.1 findet sich die Berechnung der Determinante mit raumzeitunabhängigen Feldern. Das effektive Potential im large- $N$  Limes lautet damit

$$\frac{V_{\text{eff}}}{N} = \frac{\phi^2}{2\lambda} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 \left\{ \sqrt{p^2 + \phi^2} + \frac{1}{\beta} \left[ \ln \left( 1 + e^{-\beta(\sqrt{p^2 + \phi^2} + \mu)} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\beta(\sqrt{p^2 + \phi^2} - \mu)} \right) \right] \right\}, \quad (4.14)$$

wobei die Abkürzung  $\phi^2 := \bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2$  eingeführt wurde. Wie aufgrund der chiralen Symmetrie zu erwarten, ist das effektive Potential invariant unter Rotation im  $(\bar{\sigma}, \bar{\pi})$ -Raum. Da das Integral über den gesamten Impulsraum divergiert, wurde ein Cutoff  $\Lambda$  eingeführt. Es ist nicht möglich, das NJL-Modell zu renormieren und damit unabhängig vom Cutoff zu machen. Dieser stellt also einen externen Parameter der Theorie dar. Weil höhere Impulsmoden im Integral abgeschnitten sind, werden nur Prozesse mit Energien bis etwa zur Größenordnung des Cutoffs korrekt wiedergegeben.

Abbildung 4.1 zeigt schematisch die Form des effektiven Potentials für kleine Werte von  $T$  und  $\mu$  und einer zunächst frei gewählten Kopplung  $\lambda$ . Für den Cutoff wurde hierbei  $\Lambda = 1000 \text{ MeV}$ , die für hadronische Prozesse relevante Größenordnung, gewählt. Der Vakuumerwartungswert  $\langle \phi \rangle$  ist durch das Minimum des effektiven Potentials gegeben. Im betrachteten Fall nimmt er einen endlichen Wert an. Die chirale Symmetrie ist also spontan gebrochen. Die Richtung, in welche die Symmetrie im  $(\bar{\sigma}, \bar{\pi})$ -Raum gebrochen ist, ist aufgrund der Entartung des Grundzustandes zunächst nicht vorgegeben. Hätten wir allerdings das NJL-Modell mit endlichen Stromquarkmassen betrachtet, wäre die chirale Symmetrie von vornherein explizit gebrochen und die Entartung aufgehoben. Der energetisch bevorzugte Zustand läge dabei in Richtung von  $\bar{\sigma}$ . Deshalb wählen wir

$$\langle \sigma \rangle = \langle \phi \rangle \quad \text{und} \quad \langle \pi \rangle = 0 \quad (4.15)$$

und betrachten im Folgenden  $V_{\text{eff}}(\bar{\sigma}) \equiv V_{\text{eff}}(\bar{\sigma}, \bar{\pi} = 0)$ . Mit dieser Wahl können Feldanregungen in  $\bar{\pi}$ -Richtung als die zur Symmetriebrechung gehörigen Goldstone-Bosonen identifiziert werden.

Die Auswirkung der Symmetriebrechung auf die Dynamik der Fermionen lässt sich erkennen, wenn man die bosonischen Felder in der Zustandssumme (4.6) in Fluktuationen um ihre Erwartungswerte ausdrückt, also  $\sigma$  durch  $\langle\sigma\rangle + \delta\sigma$  und  $\pi$  durch  $\langle\pi\rangle + \delta\pi = \delta\pi$  ersetzt. In der Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\delta\sigma \mathcal{D}\delta\pi e^{-S_B} \quad (4.16)$$

wird dann über die Fluktuationen integriert und die effektive Wirkung lautet:

$$S_B = \int_{\tau} \int_{\vec{x}} \left\{ \bar{\psi} (i\cancel{\partial} + i\langle\sigma\rangle + i\mu\gamma_0 + i(\delta\sigma + i\gamma_5\delta\pi)) \psi + \frac{N}{2\lambda} ((\langle\sigma\rangle + \delta\sigma)^2 + \delta\pi^2) \right\}. \quad (4.17)$$

Der Term  $\bar{\psi}i\langle\sigma\rangle\psi$ , der in dieser Form der effektiven Wirkung auftritt, hat die Form eines Masseterms für die Fermionen. Durch die Kondensation des Vakuums wird also effektiv eine Fermionenmasse generiert.

Bisher ist die Kopplung  $\lambda$  ein freier Parameter der Theorie. Experimentell werden für niedrige Temperaturen Konstituentenquarkmassen von etwa  $M_0 = 300 \text{ MeV}$  für die leichtesten Quarks gemessen. Wir fixieren die Kopplung im Limes  $T, \mu \rightarrow 0$  mit  $\Lambda = 1000 \text{ MeV}$  so, dass die effektive Masse  $\langle\sigma\rangle$  diesen Wert annimmt. Mit dieser Fixierung

$$\Lambda = 1000 \text{ MeV} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1000} \approx 2,265 \cdot 10^{-5}, \quad (4.18)$$

können nun für endliche Temperaturen und chemisches Potential Vorhersagen getroffen werden.

### Berechnung und Diskussion des Phasendiagramms

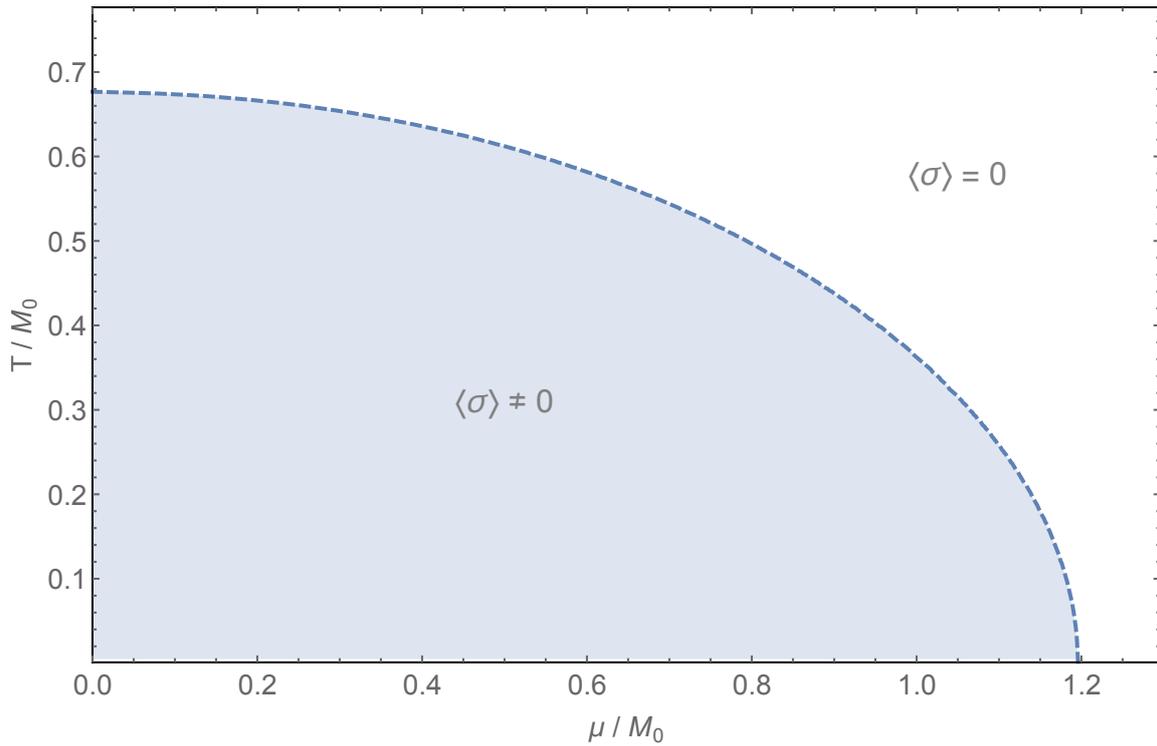
Um das Phasendiagramm zu erhalten, muss der Ordnungsparameter  $\langle\sigma\rangle$  für verschiedene Temperaturen und chemische Potentiale berechnet werden. Die chiral gebrochene Phase ist durch  $\langle\sigma\rangle \neq 0$  gekennzeichnet, die chiral symmetrische Phase durch  $\langle\sigma\rangle = 0$ . Abbildung 4.2 zeigt das für  $\Lambda = 1000 \text{ MeV}$  resultierende Phasendiagramm. Der beobachtete Phasenübergang ist ein Übergang zweiter Ordnung, das heißt, der Ordnungsparameter  $\langle\sigma\rangle$  geht beim Überschreiten der Phasengrenze kontinuierlich gegen Null.

Es wird vermutet, dass es im QCD-Phasendiagramm 3.1 einen kritischen Punkt gibt, der die Phasengrenze in einen Crossover und einen Übergang erster Ordnung teilt. Der Crossover entspricht dem Phasenübergang zweiter Ordnung in unserem Diagramm. Wir finden allerdings keinen Übergang erster Ordnung. Es ist bekannt, dass die Position des kritischen Punktes im QCD-Phasendiagramm stark mit dem zu dessen Berechnung verwendeten Modell und eventuellen externen Parametern variiert [25]. Für das NJL-Modell bedeutet das, dass der kritische Punkt unter Variation des Cutoffs  $\Lambda$  wandern kann. Deshalb betrachten wir zusätzliche Werte für den Cutoff mit entsprechend fixierten Kopplungskonstanten:

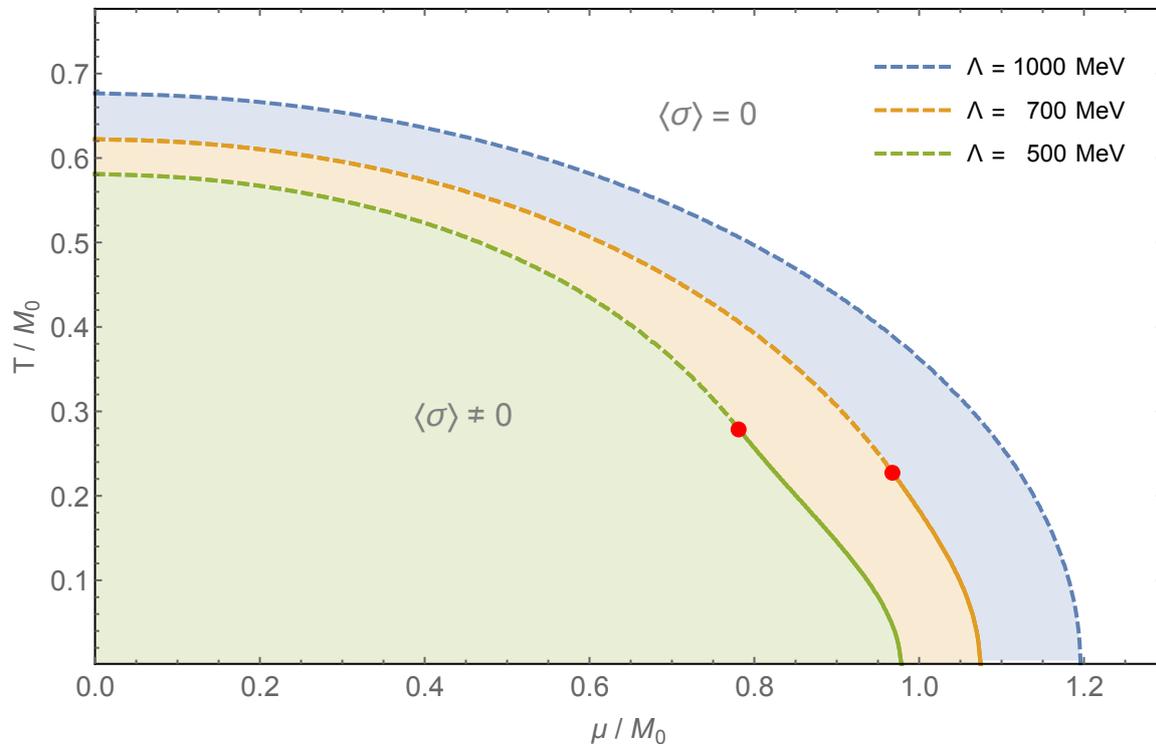
$$\begin{aligned} \Lambda = 700 \text{ MeV} & \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{700} \approx 5,054 \cdot 10^{-5} \\ \Lambda = 500 \text{ MeV} & \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{500} \approx 1,122 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

In den resultierenden Phasendiagrammen, zu sehen in Abbildung 4.3, treten kritische Punkte auf. Phasenübergänge erster Ordnung sind durchgezogen dargestellt, Phasenübergänge zweiter Ordnung gestrichelt.

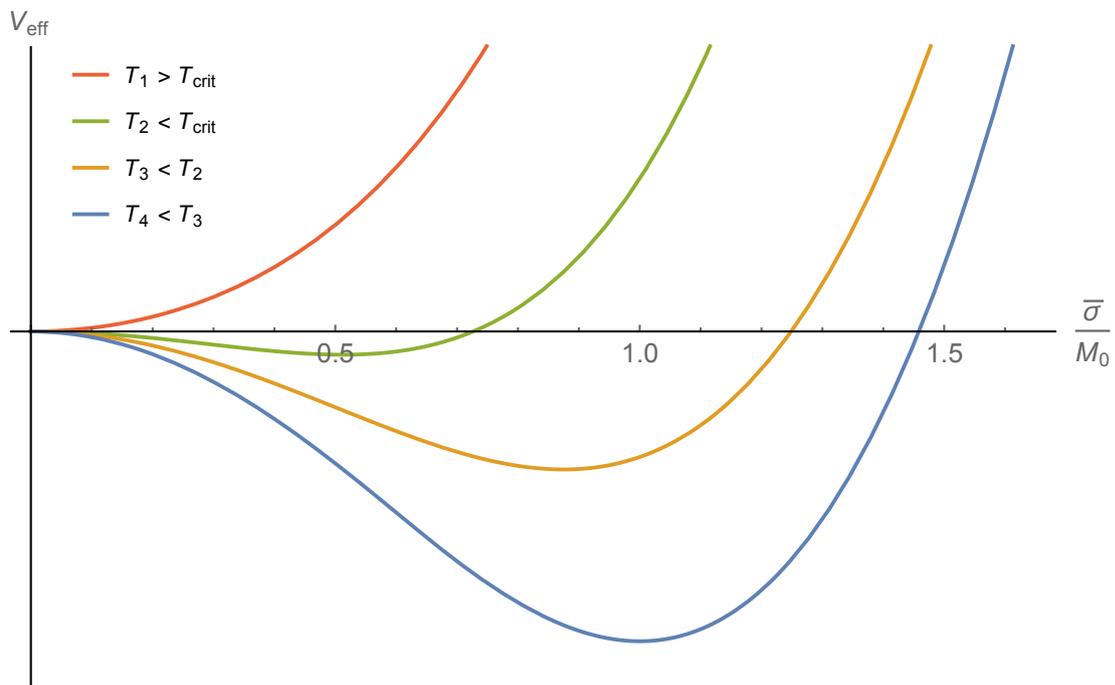
Die Änderung des effektiven Potentials beim Übergang von der chiral gebrochenen zur chiral symmetrischen Phase mit wachsender Temperatur ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Abbildung 4.4a zeigt den Phasenübergang zweiter Ordnung. Bei niedrigen chemischen Potentialen verschiebt sich das Minimum des effektiven Potentials und damit der Erwartungswert  $\langle\sigma\rangle$  kontinuierlich zum Ursprung. Ab der kritischen Temperatur liegt das Minimum im Ursprung. Das effektive Potential bei einem Phasenübergang erster Ordnung ist in Abbildung 4.4b abgebildet. Hier existieren zwei Minima. Der physikalische Grundzustand ist durch das globale Minimum gegeben. Mit wachsender Temperatur steigt der Wert des effektiven Potentials an diesem Minimum und nimmt für die kritische Temperatur den selben Wert an wie das Minimum im Ursprung. Für höhere Temperaturen liegt der wahre Grundzustand im Ursprung, die Position des globalen Minimums ändert sich dabei diskontinuierlich.



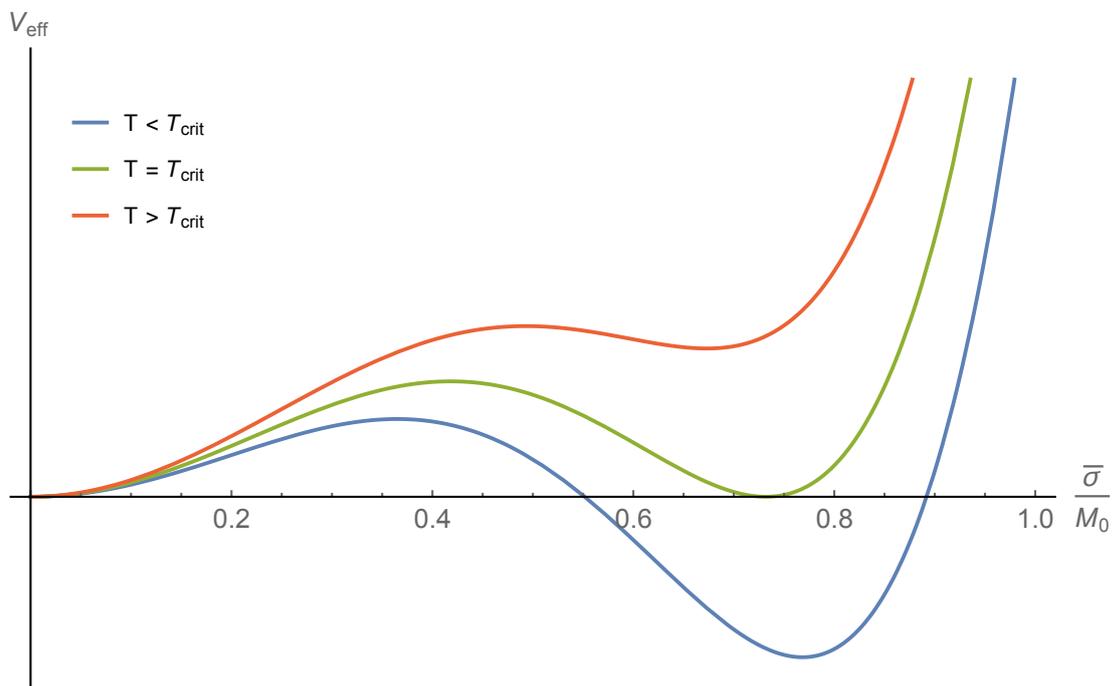
**Abbildung 4.2.:** Phasendiagramm des NJL-Modells im homogenen Fall mit Cutoff  $\Lambda = 1000$  MeV. Der Phasenübergang ist ein Übergang zweiter Ordnung.



**Abbildung 4.3.:** Phasendiagramme des NJL-Modells im homogenen Fall mit verschiedenen Werten für den Cutoff  $\Lambda$ . Übergänge erster Ordnung sind durchgezogen, Übergänge zweiter Ordnung gestrichelt dargestellt. Zusätzlich ist der kritische Punkt eingezeichnet.



(a) Effektives Potential beim Phasenübergang zweiter Ordnung.



(b) Effektives Potential beim Phasenübergang erster Ordnung.

**Abbildung 4.4.:** Verlauf des effektiven Potentials für verschiedene Temperaturen bei konstantem chemischen Potential.

### 4.3 Berechnung des Phasendiagramms mit einem inhomogenen Ansatz

#### Berechnung des effektiven Potentials

Bei der Suche nach dem Grundzustand wurde im letzten Abschnitt angenommen, dass ein mögliches Kondensat raumzeitunabhängig realisiert ist. Von vornherein steht allerdings nicht fest, dass dies der Fall ist. Deshalb wird nun allgemeiner ein inhomogener Ansatz betrachtet und untersucht, ob es Phasen gibt, in denen ein inhomogenes Kondensat energetisch bevorzugt ist. Die Fluktuationen der bosonischen Felder um ihre Erwartungswerte sind im large- $N$  Limes wie im vorigen Abschnitt unterdrückt. Da auch hier wieder im large- $N$  Limes gerechnet werden soll reicht es aus, die Felder von vornherein durch ein Hintergrundfeld zu ersetzen. Für diese wählen wir in Anlehnung zu (4.15) die Ansätze

$$\begin{aligned}\sigma &\rightarrow \bar{\sigma} \equiv M \cos(2\vec{Q}\vec{x}) = \frac{M}{2} \left( e^{2i\vec{Q}\vec{x}} + e^{-2i\vec{Q}\vec{x}} \right), \\ \pi &\rightarrow \bar{\pi} = 0,\end{aligned}\tag{4.20}$$

wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\vec{Q} = Q\vec{e}_3$  gelte. Der Ansatz für  $\sigma$  wird auch als chirale Dichtewelle bezeichnet. Mit dieser Wahl ist  $M$  ein Ordnungsparameter für die chirale Symmetriebrechung. Für  $Q = 0$  ist das Kondensat homogen, für  $Q \neq 0$  inhomogen, womit zusätzlich die Translationsinvarianz der Theorie gebrochen ist.  $Q$  ist also ein zusätzlicher Ordnungsparameter, der die homogene von der inhomogenen Phase unterscheidet.

Zur Untersuchung des Vakuumerwartungswertes  $\langle \sigma \rangle$  werden die fermionischen Freiheitsgrade wie schon im homogenen Fall ausintegriert. In diesem Schritt wird der in Ref. [1] entwickelte „fermion doubling trick“ auf das NJL-Modell angewandt. Zu diesem Zweck wird der fermionische Anteil der partiell bosonisierten Wirkung (4.7) nun in den Impulsraum übertragen:

$$\begin{aligned}\Delta S_B &= \int_{\tau} \int_{\vec{x}} \bar{\psi} (i\cancel{\partial} + i\mu\gamma_0 + i(\bar{\sigma} + i\gamma_5\bar{\pi})) \psi \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{\tau} \int_{\vec{x}} \sum_m \int_{\vec{q}} \sum_n \int_{\vec{p}} e^{i(\nu_m\tau + \vec{q}\vec{x})} \bar{\psi}_m(\vec{q}) \left( i\cancel{\partial} + i\mu\gamma_0 + \frac{iM}{2} \left( e^{2i\vec{Q}\vec{x}} + e^{-2i\vec{Q}\vec{x}} \right) \right) e^{-i(\nu_n\tau + \vec{p}\vec{x})} \psi_n(\vec{p}) \\ &= \sum_n \int_{\vec{p}} \int_{\vec{q}} \int_{\vec{x}} \left\{ e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} \bar{\psi}_n(\vec{q}) (\gamma_0(\nu_n + i\mu) + \vec{\gamma}\vec{p}) \psi_n(\vec{p}) \right. \\ &\quad \left. + \left( e^{-i(\vec{p}-\vec{q}-2\vec{Q})\vec{x}} + e^{-i(\vec{p}-\vec{q}+2\vec{Q})\vec{x}} \right) \bar{\psi}_n(\vec{q}) \frac{iM}{2} \psi_n(\vec{p}) \right\} \\ &= \sum_n \int_{\vec{p}} \left\{ \bar{\psi}_n(\vec{p}) (\gamma_0(\nu_n + i\mu) + \vec{\gamma}\vec{p}) \psi_n(\vec{p}) + \bar{\psi}_n(\vec{p} - 2\vec{Q}) \frac{iM}{2} \psi_n(\vec{p}) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\psi}_n(\vec{p} + 2\vec{Q}) \frac{iM}{2} \psi_n(\vec{p}) \right\}.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Die hierbei verwendeten Fouriertransformationen der Fermionenfelder lauten

$$\begin{aligned}\psi(\tau, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_n \int_{\vec{p}} e^{-i(\nu_n\tau + \vec{p}\vec{x})} \psi_n(\vec{p}) \\ \bar{\psi}(\tau, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_n \int_{\vec{p}} e^{i(\nu_n\tau + \vec{p}\vec{x})} \bar{\psi}_n(\vec{p}),\end{aligned}\tag{4.22}$$

wobei von  $\int_{\vec{p}} \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$  und den Matsubarafrequenzen  $\nu_n = \frac{2n+1}{\beta}\pi$  Gebrauch gemacht wird. Außerdem wurden die Relationen  $\int_{\tau} e^{-i(\nu_n - \nu_m)\tau} = \beta \delta_{nm}$  und  $\int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p})$  angewandt.

Durch Verschieben der Impulsvariable  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} \pm \vec{Q}$  kann  $\Delta S_B$  weiter zu

$$\Delta S_B = \frac{1}{2} \sum_n \int_{\vec{p}} \left\{ \bar{\psi}_n(\vec{p} - \vec{Q}) (\gamma_0 (\nu_n + i\mu) + \vec{\gamma}(\vec{p} - \vec{Q})) \psi_n(\vec{p} - \vec{Q}) + \bar{\psi}_n(\vec{p} - \vec{Q}) iM \psi_n(\vec{p} + \vec{Q}) \right. \\ \left. + \bar{\psi}_n(\vec{p} + \vec{Q}) (\gamma_0 (\nu_n + i\mu) + \vec{\gamma}(\vec{p} + \vec{Q})) \psi_n(\vec{p} + \vec{Q}) + \bar{\psi}_n(\vec{p} + \vec{Q}) iM \psi_n(\vec{p} - \vec{Q}) \right\} \quad (4.23)$$

umgeformt werden. Durch Einführen des Doppel-Fermionenvektors

$$\Psi_n := \begin{pmatrix} \psi_n(\vec{p} - \vec{Q}) \\ \psi_n(\vec{p} + \vec{Q}) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

und der komplexen  $8 \times 8$  Matrix

$$\Delta S_B^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} (\nu_n + i\mu + \gamma_0 \vec{\gamma}(\vec{p} - \vec{Q})) & \gamma_0 iM \\ \gamma_0 iM & \mathbb{1} (\nu_n + i\mu + \gamma_0 \vec{\gamma}(\vec{p} + \vec{Q})) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

lässt sich  $\Delta S_B$  kompakt aufschreiben:

$$\Delta S_B = \frac{1}{2} \sum_n \int_{\vec{p}} \Psi_n^\dagger \Delta S_B^{(2)} \Psi_n. \quad (4.26)$$

Bis zu diesem Schritt wurde der fermionische Anteil der partiell bosonisierten Wirkung nur umgeformt, Formel (4.26) ist noch exakt.

Der „fermion doubling trick“ besteht darin, die Einträge  $\psi_n(\vec{p} - \vec{Q})$  und  $\psi_n(\vec{p} + \vec{Q})$  des Doppel-Fermionenvektors (4.24) als voneinander unabhängige Freiheitsgrade zu betrachten. Es kann gezeigt werden, dass die Impulsstruktur der Zweipunkt-Funktion

$$\Gamma^{(2)}(p_1, p_2) \equiv \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{\sigma}]}{\delta \bar{\sigma}(p_1) \delta \bar{\sigma}(p_2)} \Big|_{\bar{\sigma}=0} \quad (4.27)$$

in einer Vertex-Entwicklung

$$\Gamma[\bar{\sigma}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{p_1} \dots \int_{p_n} \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \delta^{(D)}(p_1 + \dots + p_n) \bar{\sigma}(p_1) \dots \bar{\sigma}(p_n) \quad (4.28)$$

der effektiven Wirkung um den Ursprung unter dieser Annahme unverändert bleibt [1].

Bei einem Phasenübergang zweiter Ordnung von einer chiral gebrochenen zur symmetrischen Phase ändert sich, wie schon in Abbildung 4.4a veranschaulicht, die Krümmung des effektiven Potentials im Ursprung. Da diese von der Zweipunkt-Funktion (4.27) bestimmt wird, können Phasenübergänge zweiter Ordnung im Ordnungsparameter  $M$  mit dem „fermion doubling trick“ exakt bestimmt werden. Die Impulsstrukturen höherer  $n$ -Punkt-Funktionen werden damit allerdings nicht exakt wiedergegeben. Deshalb können bei der Berechnung anderer Observablen, zum Beispiel Phasenübergängen erster Ordnung oder Phasenübergängen im Ordnungsparameter  $Q$ , Abweichungen zu einer exakten Lösung auftreten.

Unter der Annahme unabhängiger Fermionen im Doppel-Fermionenvektor lässt sich der fermionische Anteil der Zustandssumme wie schon im homogenen Fall mit der Gaußformel (2.13) ausintegrieren. Es folgt das effektive Potential

$$\frac{V_{\text{eff}}}{N} = \frac{\Gamma}{N\beta V} = \frac{1}{N\beta V} \left( \frac{N}{2\lambda} \int_{\tau} \int_{\vec{x}} \bar{\sigma}^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \Delta S_B^{(2)} \right), \quad (4.29)$$

wobei  $V = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x = \lim_{L \rightarrow \infty} \left( \int_{-L/2}^{L/2} dx \right)^3$  für das Volumen des Systems steht.

Das Integral im ersten Teil auf der rechten Seite von Formel (4.29) berechnet sich zu

$$\int_{\tau} \int_{\bar{x}} \bar{\sigma}^2 = \lim_{L \rightarrow \infty} \beta L^2 \int_{-L/2}^{L/2} dx_3 M^2 \cos(2Qx_3) = \beta V M^2 \mathcal{G}, \quad (4.30)$$

wobei die beiden Fälle  $\mathcal{G} = \begin{cases} 1, & \text{für } Q = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } Q \neq 0 \end{cases}$  unterschieden werden müssen.

Die Spur im zweiten Teil auf der rechten Seite läuft wieder über den Impuls- und Frequenzraum, über die Matrixstruktur von  $\Delta S_B^{(2)}$  und über die  $N$  Fermionen. Da sich die Unterräume der einzelnen Fermionen nicht unterscheiden, äußert sich letzterer Anteil der Spur durch einen Faktor  $N$ . Um den Anteil der Spur, der über die Matrixstruktur von  $\Delta S_B^{(2)}$  läuft, auszuwerten kann wieder die Beziehung  $\text{Tr} \ln(A) = \ln \det(A)$  verwendet werden. Sei dieser Teil mit  $\text{Tr}_{8 \times 8}$  bezeichnet, so ergibt sich

$$\text{Tr}_{8 \times 8} \ln(\Delta S_B^{(2)}) = \ln \det_{8 \times 8}(\Delta S_B^{(2)}) = \ln \left( \prod_{i=1}^8 \lambda_i \right), \quad (4.31)$$

wobei  $\lambda_i$  die Eigenwerte von  $\Delta S_B^{(2)}$  bezeichnet. Die Eigenwerte lauten

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = \lambda_{5,6} &= \nu_n + i\mu + i\sqrt{M^2 + \vec{p}^2 + Q^2 \pm 2Q\sqrt{M^2 + p_3^2}} \equiv \nu_n + i\mu + iE_{\pm}, \\ \lambda_{3,4} = \lambda_{7,8} &= \nu_n + i\mu - i\sqrt{M^2 + \vec{p}^2 + Q^2 \pm 2Q\sqrt{M^2 + p_3^2}} \equiv \nu_n + i\mu - iE_{\pm}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sie sind je zweifach entartet. Mit den der Übersichtlichkeit halber eingeführten Abkürzungen kann die Spur über die Matrixstruktur weiter zu

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{8 \times 8} \ln(\Delta S_B^{(2)}) &= 2 \ln((\nu_n + i\mu + iE_+)(\nu_n + i\mu - iE_+)(\nu_n + i\mu + iE_-)(\nu_n + i\mu - iE_-)) \\ &= 2 \sum_{\pm} \ln((\nu_n + i\mu)^2 + E_{\pm}^2) \end{aligned} \quad (4.33)$$

umgeformt werden. Insgesamt lautet der zweite Teil auf der rechten Seite von Formel (4.29) damit:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \Delta S_B^{(2)} &= 2NV \int_{\vec{p}} \sum_n \sum_{\pm} \ln((\nu_n + i\mu)^2 + E_{\pm}^2) \\ &= 2NV \int_{\vec{p}} \sum_{\pm} [\beta E_{\pm} + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\pm} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\pm} - \mu)})]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Im Rechenschritt von der ersten zur zweiten Zeile wurde die Matsubarasumme ausgeführt, die schon im homogenen Fall auftrat. Die Berechnung dieser Summe findet sich in Anhang B.2.

Das vorläufige Ergebnis für das effektive Potential ergibt sich zu:

$$\frac{V_{\text{eff}}}{N} = \frac{M^2 \mathcal{G}}{2\lambda} - \int_{\vec{p}} \sum_{\pm} \left[ E_{\pm} + \frac{1}{\beta} (\ln(1 + e^{-\beta(E_{\pm} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\pm} - \mu)})) \right]. \quad (4.35)$$

Setzt man in diesem Ausdruck  $Q = 0$ , erhält man, wie zu erwarten, das effektive Potential (4.14), das bereits mit dem homogenen Ansatz berechnet wurde.

Im Vakuum, also für  $T, \mu \rightarrow 0$ , soll das Modell die experimentell beobachtete Konstituentenquarkmasse von  $M_0 = 300 \text{ MeV}$  reproduzieren. Zu diesem Zweck wird der Faktor  $\frac{\mathcal{G}}{\lambda}$  in Abhängigkeit von  $Q$  so eingestellt,

dass das in der chiral gebrochenen Phase gegebene nichttriviale Minimum des effektiven Potentials bei diesem Wert  $M_0$  liegt. Das nach  $M$  differenzierte effektive Potential lautet, wie in Anhang B.3 gezeigt,

$$\frac{\partial}{\partial M} \frac{V_{\text{eff}}}{N} = M \left[ \frac{\mathcal{J}}{\lambda} - \int_{\bar{p}} \sum_{\pm} \frac{1}{E_{\pm}} \left( 1 \pm \frac{Q}{\sqrt{M^2 + p_3^2}} \right) \left( 1 - \sum_{\alpha} \frac{1}{1 + \exp(\beta(E_{\pm} + \alpha\mu))} \right) \right], \quad (4.36)$$

wobei über  $\alpha \in \{-1, 1\}$  summiert wird. Im Limes verschwindender Temperatur und chemischen Potentials vereinfacht sich die Ableitung zu

$$\left. \frac{\partial}{\partial M} \frac{V_{\text{eff}}}{N} \right|_{T, \mu \rightarrow 0} = M \left[ \frac{\mathcal{J}}{\lambda} - \int_{\bar{p}} \sum_{\pm} \frac{1}{E_{\pm}} \left( 1 \pm \frac{Q}{\sqrt{M^2 + p_3^2}} \right) \right]. \quad (4.37)$$

Wie oben beschrieben lässt sich aus der Forderung, dass das Minimum des effektiven Potentials bei 300 MeV liegen soll, also

$$\frac{\mathcal{J}}{\lambda} \stackrel{!}{=} \left[ \int_{\bar{p}} \sum_{\pm} \frac{1}{E_{\pm}} \left( 1 \pm \frac{Q}{\sqrt{M_0^2 + p_3^2}} \right) \right]_{M_0=300 \text{ MeV}} \quad (4.38)$$

gilt, die Kopplungskonstante fixieren. Das effektive Potential nimmt damit die Form

$$\begin{aligned} \frac{V_{\text{eff}}}{N} &= \int_{\bar{p}} \sum_{\pm} \left\{ M^2 \left[ \frac{1}{2E_{\pm}} \left( 1 \pm \frac{Q}{\sqrt{M_0^2 + p_3^2}} \right) \right]_{M_0=300 \text{ MeV}} - \left[ E_{\pm} + \frac{1}{\beta} \sum_{\alpha} \ln(1 + e^{-\beta(E_{\pm} + \alpha\mu)}) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\Lambda} dp p^2 \int_{-1}^1 d \cos(\theta) \sum_{\pm} \left\{ M^2 \left[ \frac{1}{2E_{\pm}} \left( 1 \pm \frac{Q}{\sqrt{M_0^2 + (p \cos(\theta))^2}} \right) \right]_{M_0=300 \text{ MeV}} \right. \\ &\quad \left. - \left[ E_{\pm} + \frac{1}{\beta} \sum_{\alpha} \ln(1 + e^{-\beta(E_{\pm} + \alpha\mu)}) \right] \right\} \quad (4.39) \end{aligned}$$

an. Für die Impulsintegration wurde wieder ein Cutoff  $\Lambda$  eingeführt.

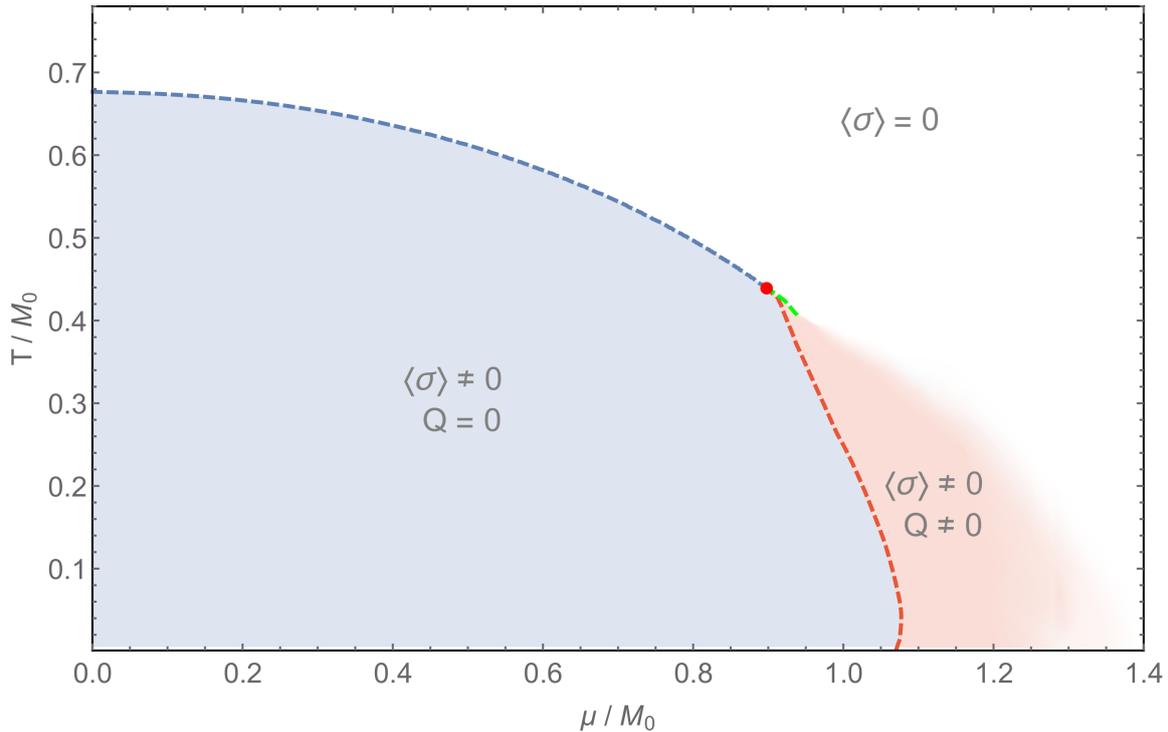
Unabhängig von  $Q$  resultiert für  $M \rightarrow 0$  die freie Theorie, folglich muss  $V_{\text{eff}}(T, \mu, Q, M)|_{M=0} = V_0$  für alle Werte  $Q$  gefordert werden. In der bisherigen Analyse unterscheiden sich die Werte  $V_{\text{eff}}(T, \mu, Q, M)|_{M=0}$ , die Gleichheit kann allerdings mit

$$\frac{V_{\text{eff}}}{N}(T, \mu, Q, M) \longrightarrow \frac{V_{\text{eff}}}{N}(T, \mu, Q, M) - \frac{V_{\text{eff}}}{N}(T, \mu, Q, 0) \quad (4.40)$$

erzwungen werden. Dabei wurde o.B.d.A.  $V_0 = 0$  gewählt.

## Berechnung und Diskussion des Phasendiagramms

Um den physikalisch realisierten Vakuumerwartungswert  $\langle \sigma \rangle \simeq M \cos(2\vec{Q}\vec{x})$  zu ermitteln muss das effektive Potential bezüglich  $M$  und  $Q$  minimiert werden. Ein Kondensat liegt für  $M \neq 0$  vor. Dabei kann zwischen der homogenen Phase mit  $Q = 0$  und der inhomogenen Phase mit  $Q \neq 0$  unterschieden werden. Aufgrund eines Cutoff-Effektes, der weiter unten noch genauer erläutert wird, ist das effektive Potential nicht nach unten gebunden. Damit kann das effektive Potential nicht global minimiert werden. Der Einfluss des Cutoff-Effektes ist für kleine Werte der Parameter  $M, Q \ll \Lambda$  allerdings gering. Deshalb bilden sich für einen Teil der Punkte  $(T, \mu)$  im Phasendiagramm lokale Minima des effektiven Potentials, die den Grundzustand angeben. Abbildung 4.5 zeigt das für  $\Lambda = 1000$  MeV resultierende Phasendiagramm.



**Abbildung 4.5.:** Phasendiagramm des NJL-Modells im inhomogenen Fall für  $\Lambda = 1000 \text{ MeV}$ . Neben der chiral symmetrischen und der homogenen Phase existiert eine inhomogene Phase. Am rot eingezeichneten Tripelpunkt treffen die drei Phasengrenzen aufeinander. Alle Phasenübergänge sind von zweiter Ordnung. Aufgrund eines Cutoff-Effektes kann der Phasenübergang von der inhomogenen Phase zur chiral symmetrischen Phase nur für einen kleinen Bereich ermittelt werden.

Die Phasenübergänge von den chiral gebrochenen zur chiral symmetrischen Phase sind Übergänge zweiter Ordnung. Diese Beobachtung ist vor allem wichtig für den Übergang von der inhomogenen zur chiral symmetrischen Phase nahe des Tripelpunktes. Bei diesem geht das Minimum des effektiven Potentials bei endlichem  $Q$  in Richtung  $M \rightarrow 0$ . Der „fermion doubling trick“ gibt, wie oben beschrieben, Phasenübergänge zweiter Ordnung im Ordnungsparameter  $M$  exakt wieder. Damit bestätigt der beobachtete Phasenübergang von der inhomogenen zur chiral symmetrischen Phase die Existenz einer inhomogenen Phase in der hier betrachteten Variante des NJL-Modells.

Die prinzipielle Form des effektiven Potentials in den verschiedenen Phasen sowie das Zustandekommen der Phasenübergänge wird im folgenden diskutiert:

- Für hohe Temperaturen nimmt das effektive Potential die in Abbildung 4.6 dargestellte Form an. Das lokale Minimum liegt bei  $M = 0$ . Es gilt also  $\langle \sigma \rangle = 0$  und die chirale Symmetrie ist nicht spontan gebrochen. Die Entartung des Minimums bezüglich  $Q$  ist irrelevant, da dieser Parameter für  $M = 0$  ohnehin keine Rolle spielt.
- Abbildung 4.7 zeigt das effektive Potential in der homogenen Phase. Das lokale Minimum liegt bei einem endlichen Wert für  $M$  aber bei  $Q = 0$ . Es ist also ein raumzeitunabhängiges Kondensat  $\langle \sigma \rangle = M = \text{const.}$  energetisch bevorzugt. Die Phasengrenze zwischen der homogenen und der chiral symmetrischen Phase ist die selbe wie im Phasendiagramm 4.2 des vorigen Abschnitts. Diese Beobachtung kann damit erklärt werden, dass das effektive Potential (4.39) für  $Q \rightarrow 0$  in das mit dem homogenen Ansatz hergeleitete effektive Potential (4.14) übergeht.
- Für hohe Werte des chemischen Potentials liegt das lokale Minimum wie in Abbildung 4.8 dargestellt bei einem endlichen Wert  $Q \neq 0$ . Die homogene Phase geht damit in eine inhomogene Phase über.

---

Mit größer werdendem chemischen Potential wandert das Minimum in Richtung größerer Werte für  $Q$ , die Wellenzahl des Kondensats steigt dabei an.

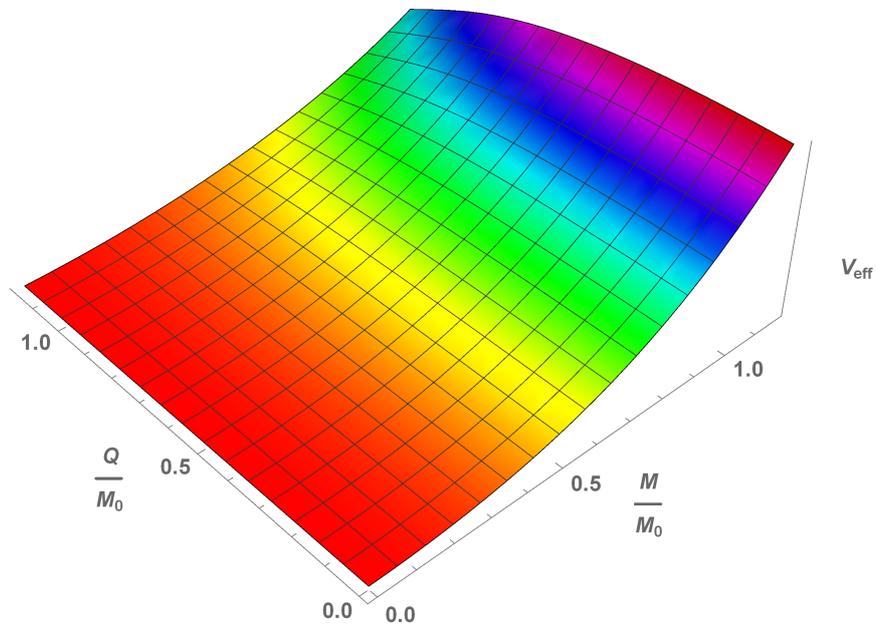


Abbildung 4.6.: Effektives Potential im chiral symmetrischen Fall  $\langle \sigma \rangle = 0$ .

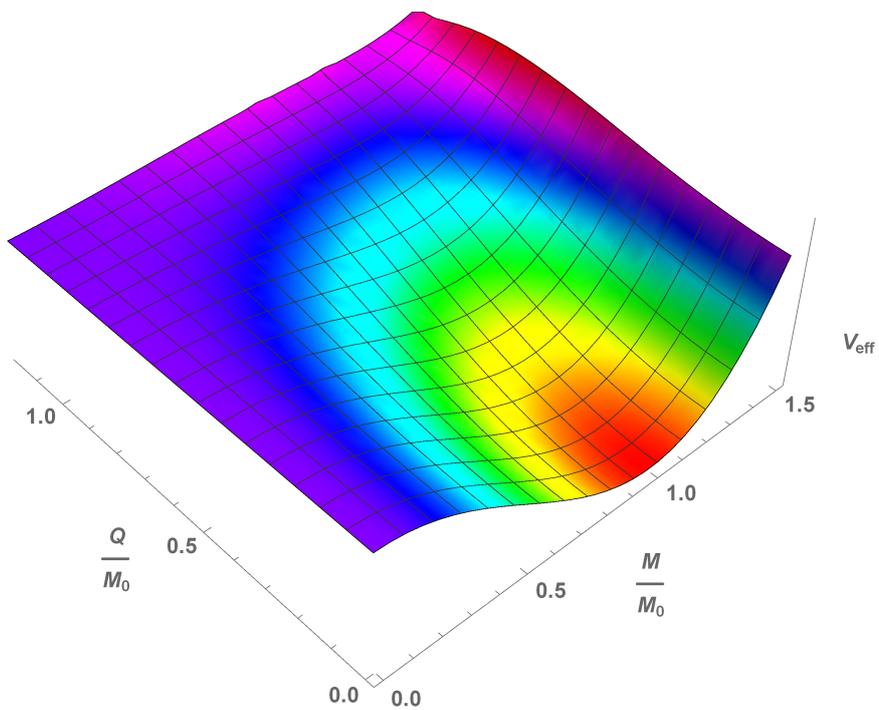
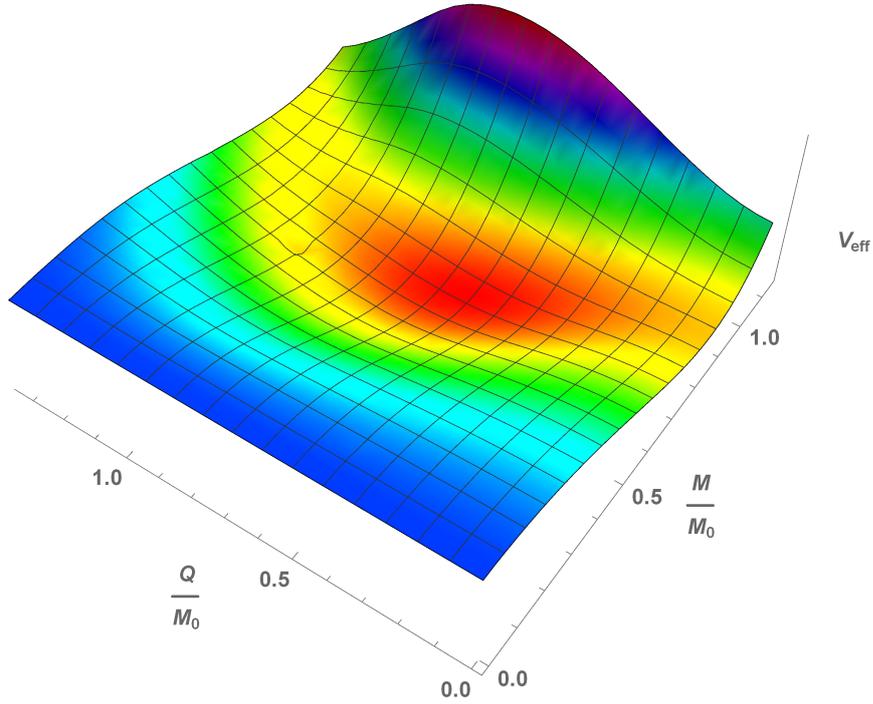


Abbildung 4.7.: Effektives Potential in der homogenen Phase  $M \neq 0$ ,  $Q = 0$ .



**Abbildung 4.8.:** Effektives Potential in der inhomogenen Phase  $M \neq 0$ ,  $Q \neq 0$ .

Für noch höhere Werte des chemischen Potentials wandert das Minimum unabhängig von der Größe des in der numerischen Minimum-Suche betrachteten Gebiets im  $(M, Q)$ -Raum an dessen Grenze. Abbildung 4.9a zeigt das effektive Potential für diesen Fall, wobei das dargestellte Gebiet im  $(M, Q)$ -Raum in etwa den Gebieten der vorigen Plots entspricht. Auch für größere Gebiete, etwa wie in Abbildung 4.9b zu sehen, lässt sich kein physikalisch sinnvolles lokales Minimum mehr finden, das effektive Potential ist nicht nach unten beschränkt. Damit kann keine Aussage mehr über den Grundzustand getroffen werden, es ist also mit der hier verwendeten Methode nicht möglich, das Phasendiagramm zu höheren chemischen Potentials fortzusetzen. Die Phasengrenze zwischen dem inhomogenen Kondensat und der chiral symmetrischen Phase kann nur bis zu diesem Punkt berechnet werden.

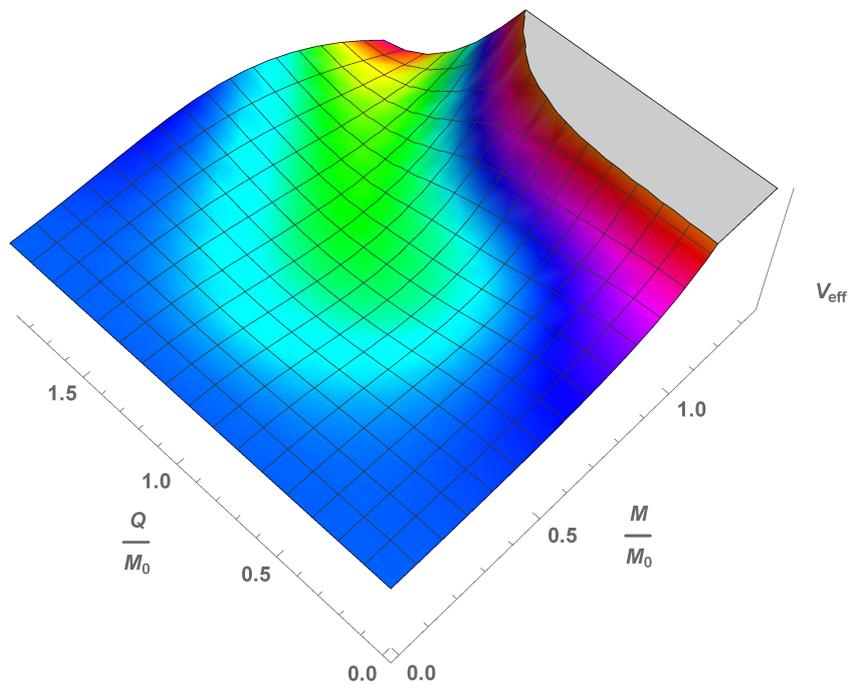
Es verbleibt zu überprüfen, weshalb das effektive Potential nicht nach unten gebunden ist. Betrachtet man Formel (4.39), so fällt auf, dass der Anteil

$$\Delta V \equiv - \int_0^\Lambda dp p^2 \int_{-1}^1 d \cos(\theta) \sum_{\pm} \left[ E_{\pm} + \frac{1}{\beta} \sum_a \ln(1 + e^{-\beta(E_{\pm} + a\mu)}) \right] \quad (4.41)$$

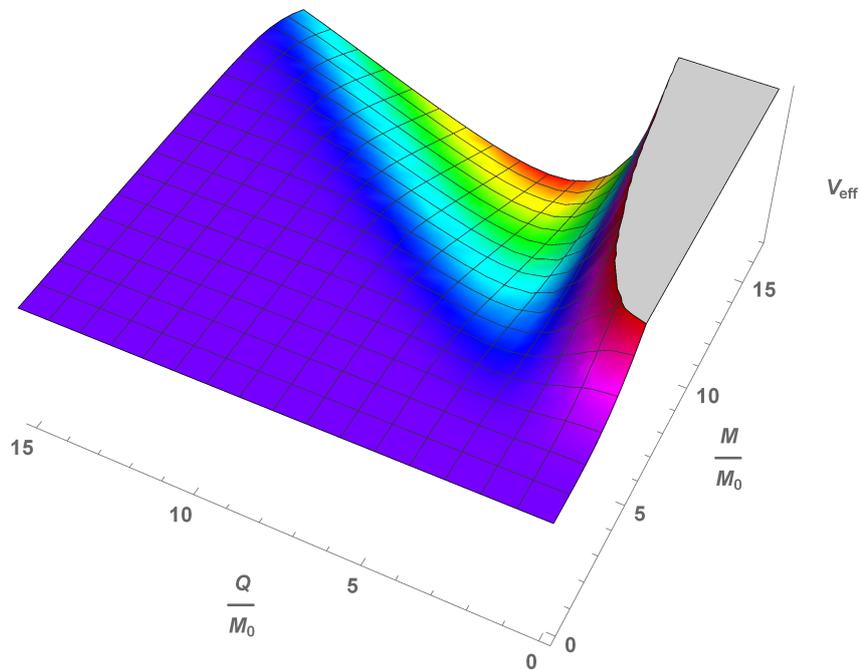
negativ zum effektiven Potential beiträgt. Dabei gilt asymptotisch  $\lim_{M \rightarrow \infty} \Delta V = -\infty$ . Die beiden Terme

$$V_0^{\pm} \equiv \int_0^\Lambda dp p^2 \int_{-1}^1 d \cos(\theta) M^2 \left[ \frac{1}{2E_{\pm}} \left( 1 \pm \frac{Q}{\sqrt{M_0^2 + (p \cos(\theta))^2}} \right) \right]_{M_0=300 \text{ MeV}} \quad (4.42)$$

müssten in der Summe den negativen Beitrag von  $\Delta V$  ausgleichen, damit das effektive Potential gebunden ist. Für kleine Werte  $p < \frac{Q^2 - M_0^2}{\cos^2(\theta)}$  des Impulses wird der Integrand von  $V_0^-$  negativ. Da die Impulsintegration nur bis zum Cutoff  $\Lambda$  ausgeführt wird, kann  $V_0^-$  insgesamt negativ werden. Speziell für große Werte von  $Q$  gilt  $\sum_{\pm} V_0^{\pm} \xrightarrow{Q \gg 1} 0$ . In diesem Fall kommt der dominante Beitrag zum effektiven Potential von  $\Delta V$ . Das asymptotische Verhalten des effektiven Potentials in Abbildung 4.9b ist also ein Cutoff-Effekt der darauf zurückzuführen ist, dass das Nambu-Jona-Lasinio Modell nicht renormierbar ist.



(a) Effektives Potential für hohe Werte des chemischen Potentials. In dem betrachteten Gebiet findet sich kein lokales Minimum.



(b) Asymptotisches Verhalten des effektiven Potentials.

**Abbildung 4.9.:** Effektives Potential für hohe Werte des chemischen Potentials bei einer typischen Temperatur der inhomogenen Phase. Durch einen Cutoff-Effekt existiert kein lokales Minimum des effektiven Potentials mehr, sodass keine Aussage über den Grundzustand getroffen werden kann.

---

## 5 Fazit und Ausblick

Die Erforschung des QCD-Phasendiagramms verbleibt als eine der großen Herausforderungen der Hochenergiephysik. Ziel der Arbeit war es, das Phasendiagramm der chiralen Symmetriebrechung im Rahmen des NJL-Modells im chiralen Limes zu berechnen. Um das chirale Kondensat  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ , welches der Ordnungsparameter der chiralen Symmetriebrechung ist, zu berechnen, wurden mithilfe einer Hubbard-Stratonovich-Transformation bosonische Hilfsfelder eingeführt. Im large- $N$  Limes sind die Fluktuationen der Hilfsfelder unterdrückt, wodurch diese durch ein Mean-Field ersetzt werden konnten. Für diese Hintergründfelder wurden verschiedene Ansätze gewählt.

Für einen ersten Überblick wurde das Phasendiagramm mit einem homogenen Ansatz berechnet. Die Kopplung der Felder konnte anhand der Forderung, dass der Erwartungswert des Kondensats im Grenzfall verschwindender Temperatur und chemischen Potentials den experimentell beobachteten Konstituentenquarkmassen entspricht, fixiert werden. Da das NJL-Modell nicht renormierbar ist, musste ein Cutoff für die Impulsintegration eingeführt werden. Abhängig von dem Wert des Cutoffs finden wir einen kritischen Punkt, an dem der Phasenübergang zweiter Ordnung zu einem Übergang erster Ordnung wechselt.

Zur Berechnung des Phasendiagramms mit einem inhomogenen Ansatz für das Kondensat, einer sogenannten chiralen Dichtewelle, konnte der „*fermion doubling trick*“ erfolgreich auf das NJL-Modell übertragen werden. Das ermöglichte den Nachweis der Existenz einer inhomogenen Phase. Durch einen Cutoff-Effekt wurde die Berechnung des Grundzustandes für hohe Werte des chemischen Potentials allerdings unmöglich. Deshalb konnte die Grenze zwischen der chiral symmetrischen und der inhomogenen Phase nur für einen kleinen Bereich des Phasendiagramms ermittelt werden.

In einem weiteren Schritt wäre es interessant, allgemeinere Ansätze für ein inhomogenes Kondensat zu betrachten. Damit ließen sich potentiell weitere inhomogene Phasen finden. Statt der chiralen Dichtewelle wäre eine Entwicklung  $\bar{\sigma} = \sum_{n=0}^k M_n \cos(n\vec{Q}\vec{x})$  in eine Fourier-Reihe denkbar. Anstelle einer Verdopplung der fermionischen Freiheitsgrade würden in diesem Fall  $k$  Fermionen als unabhängig betrachtet werden.

Der „*fermion doubling trick*“ wurde ursprünglich entwickelt um einen ersten Eindruck des Phasendiagramms zu erhalten und um die Existenz inhomogener Phasen nachzuweisen. Ergebnisse wie die Grenze zwischen der homogenen und der inhomogenen Phase müssen allerdings kritisch betrachtet werden. Mithilfe der durch den „*fermion doubling trick*“ vergleichsweise einfach gewonnenen Informationen ist es möglich, zielgerichtet genauere Studien an einem Phasendiagramm durchzuführen.

# A Konventionen

Sofern nicht explizit darauf hingewiesen, werden natürliche Einheiten

$$\hbar = c = k_B = 1 \quad (\text{A.1})$$

verwendet.

In den Kapiteln 2 und 3 wird überwiegend in Minkowskischer Raumzeit in  $D = d + 1$  Dimensionen gerechnet. Dabei ist die Dirac-Algebra durch

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad (\text{A.3})$$

definiert.

Die Rechnungen bei endlicher Temperatur in Kapitel 4 sind in euklidischer Raumzeit

$$(\tau, \vec{x}_E) = (it, \vec{x}) \quad (\text{A.4})$$

$$x_E^2 = -x^2 \quad (\text{A.5})$$

gehalten. Hier lautet die Dirac-Algebra:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0, \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad (\text{A.7})$$

In chiraler Darstellung sind die Gamma-Matrizen durch

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

gegeben, wobei  $\sigma_j$  die drei Pauli Matrizen bezeichnet.

Es werden die Abkürzungen

$$\int_\tau \equiv \int_0^\beta d\tau, \quad \int_{\vec{x}} \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3x, \quad \int_{\vec{p}} \equiv \int_{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (\text{A.9})$$

verwendet,  $\beta = \frac{1}{T}$  ist die inverse Temperatur.

Die Fouriertransformation eines in euklidischer Zeit antiperiodischen Fermionenfeld  $\overset{(-)}{\psi}(\tau, \vec{x}) = -\overset{(-)}{\psi}(\tau + \beta, \vec{x})$  ist gegeben durch

$$\overset{(-)}{\psi}(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_n \int_{\vec{p}} e^{\pm i(\nu_n \tau + \vec{p}\vec{x})} \psi_n(\vec{p}), \quad (\text{A.10})$$

dabei steht  $\nu_n = \frac{2n+1}{\beta} \pi$  für die fermionischen Matsubarafrequenzen.

## B Nebenrechnungen

### B.1 Berechnung der im homogenen Fall auftretenden Determinante

Um das effektive Potential (4.12) zu erhalten, muss der Ausdruck

$$\ln \det (i\partial + i\mu\gamma_0 + i(\bar{\sigma} + i\gamma_5\bar{\pi})) \quad (\text{B.1})$$

mit  $\bar{\sigma}(x) = \bar{\sigma}$  und  $\bar{\pi}(x) = \bar{\pi}$  berechnet werden. Die Determinante läuft über den Ortsraum, die Zeit und über die Matrixstruktur des Operators. Mit der für einen Operator  $A$  allgemein gültigen Beziehung  $\text{Tr} \ln(A) = \ln \det(A)$  kann (B.1) umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} & \ln \det (i\partial + i\mu\gamma_0 + i(\bar{\sigma} + i\gamma_5\bar{\pi})) \\ &= \text{Tr}_{\tau, \vec{x}} \ln \det_{4 \times 4} (i\partial + i\mu\gamma_0 + i(\bar{\sigma} + i\gamma_5\bar{\pi})) \\ &= \int_{\tau} \int_{\vec{x}} \langle x | \ln \det_{4 \times 4} (i\partial + i\mu\gamma_0 + i(\bar{\sigma} + i\gamma_5\bar{\pi})) \frac{1}{\beta} \sum_n \int_{\vec{p}} |p\rangle \langle p|x\rangle \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{\tau} \int_{\vec{x}} \sum_n \int_{\vec{p}} \langle x|p\rangle \langle p|x\rangle \ln \det_{4 \times 4} (\gamma_0(v_n + i\mu) + \vec{\gamma}\vec{p} + i(\bar{\sigma} + i\gamma_5\bar{\pi})) \\ &= V \sum_n \int_{\vec{p}} \ln \det_{4 \times 4} (\gamma_0(v_n + i\mu) + \vec{\gamma}\vec{p} + i(\bar{\sigma} + i\gamma_5\bar{\pi})). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Dabei bezeichnet  $\text{Tr}_{\tau, \vec{x}}$  den Anteil der Spur, der über die Zeit und den Ortsraum läuft, die Determinante  $\det_{4 \times 4}$  bezieht sich auf die Matrixstruktur. Die Orts- und Zeitintegrationen im letzten Schritt sind trivial, da  $\bar{\sigma}$  und  $\bar{\pi}$  raumzeitunabhängig gewählt wurden. Unter Verwendung der expliziten chiralen Darstellung (A.8) der Gamma-Matrizen kann die Determinante über die Matrixstruktur ausgerechnet werden, sodass

$$\begin{aligned} & V \sum_n \int_{\vec{p}} \ln \det_{4 \times 4} (\gamma_0(v_n + i\mu) + \vec{\gamma}\vec{p} + i(\bar{\sigma} + i\gamma_5\bar{\pi})) \\ &= 2V \sum_n \int_{\vec{p}} \ln((v_n + i\mu)^2 + \vec{p}^2 + \bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2) \\ &= 2V \int_{\vec{p}} \left\{ \beta \sqrt{\vec{p}^2 + \bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2} + \ln \left( 1 + e^{-\beta(\sqrt{\vec{p}^2 + \bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2} + \mu)} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\beta(\sqrt{\vec{p}^2 + \bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2} - \mu)} \right) \right\} \\ &= \frac{V}{\pi^2} \int dp p^2 \left\{ \beta \sqrt{p^2 + \bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2} + \ln \left( 1 + e^{-\beta(\sqrt{p^2 + \bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2} + \mu)} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\beta(\sqrt{p^2 + \bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2} - \mu)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

folgt. Im zweiten Schritt wurde die Summe über die Matsubarafrequenzen ausgeführt, die allgemeine Rechnung dazu findet sich in Anhang B.2.

### B.2 Berechnung der Matsubarasumme

Bei der Berechnung der effektiven Potentiale im Fall endlicher Temperatur treten Matsubarasummen der Form

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ln((v_n + i\mu)^2 + E^2) \quad (\text{B.4})$$

auf, die an dieser Stelle ausgewertet werden. Dafür wird die Reihe in der nach  $E$  differenzierten Matsubarasumme

$$\frac{1}{2E} \frac{\partial}{\partial E} \sum_n \ln((\nu_n + i\mu)^2 + E^2) = \sum_n \frac{1}{(\nu_n + i\mu)^2 + E^2} \quad (\text{B.5})$$

berechnet und anschließend integriert.

Die rechte Seite von Formel (B.5) kann mithilfe des Residuensatzes in das Kurvenintegral

$$\frac{i}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} dz f(z) = -\sum_n \text{res}_{i\nu_n - \mu}(f) \quad (\text{B.6})$$

mit

$$f(z) := \frac{\beta}{2} \frac{1}{z^2 - E^2} \tanh\left(\frac{\beta}{2}(z + \mu)\right) \quad (\text{B.7})$$

über die komplexe Ebene umgeschrieben werden. Hierbei wird die Integrationskontur  $\mathcal{C}$  so gewählt, dass die Pole von  $f$  bei  $z_n = i\nu_n - \mu$  innerhalb liegen, die beiden Pole bei  $z_{\pm} = \pm E$  außerhalb. Einsetzen der Residuen

$$\text{res}_{i\nu_n - \mu}(f) = \frac{-1}{(\nu_n + i\mu)^2 + E^2} \quad (\text{B.8})$$

in Formel (B.6) bestätigt den Ansatz.

Unabhängig von  $\mu$  kann die Kontur so verformt werden, dass zwei Konturen  $\mathcal{C}'$  und  $\mathcal{C}''$  resultieren, die in mathematisch negativer Richtung um die Pole bei  $z_{\pm} = \pm E$  laufen. Mit

$$\text{res}_{\pm E}(f) = \lim_{z \rightarrow \pm E} (z \pm E) f(z) = \pm \frac{\beta}{4E} \tanh\left(\frac{\beta}{2}(\mu \pm E)\right) \quad (\text{B.9})$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}', \mathcal{C}''} dz f(z) &= \text{res}_E(f) + \text{res}_{-E}(f) \\ &= \frac{\beta}{4E} \left( \tanh\left(\frac{\beta}{2}(\mu + E)\right) - \tanh\left(\frac{\beta}{2}(\mu - E)\right) \right) \\ &= \frac{\beta}{4E} \left( \frac{e^{\beta(\mu+E)}}{1 + e^{\beta(\mu+E)}} - \frac{e^{-\beta(\mu+E)}}{1 + e^{-\beta(\mu+E)}} - \frac{e^{\beta(\mu-E)}}{1 + e^{\beta(\mu-E)}} + \frac{e^{-\beta(\mu-E)}}{1 + e^{-\beta(\mu-E)}} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

womit die Summe in der Ableitung verschwunden ist. Nach Formel (B.5) folgt die Lösung der Matsubarasumme hieraus durch Integration:

$$\begin{aligned} &\sum_n \ln((\nu_n + i\mu)^2 + E^2) \\ &= 2E \int dE \frac{\beta}{4E} \left( \frac{e^{\beta(\mu+E)}}{1 + e^{\beta(\mu+E)}} - \frac{e^{-\beta(\mu+E)}}{1 + e^{-\beta(\mu+E)}} - \frac{e^{\beta(\mu-E)}}{1 + e^{\beta(\mu-E)}} + \frac{e^{-\beta(\mu-E)}}{1 + e^{-\beta(\mu-E)}} \right) \\ &= \frac{\beta}{2} \left( \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{\beta(E+\mu)}) + \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta(E+\mu)}) + \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{\beta(E-\mu)}) + \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta(E-\mu)}) \right) \\ &= \beta E + \ln(1 + e^{-\beta(E+\mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E-\mu)}). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Im letzten Schritt wurden die Umformungen  $\frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{\beta(E\pm\mu)}) = (E \pm \mu) \ln(1 + e^{-\beta(E\pm\mu)})$  des ersten und dritten Summanden vorgenommen.

---

### B.3 Berechnung der Ableitung des effektiven Potentials im inhomogenen Fall

---

Unter Verwendung der Abkürzung  $\Delta V = \int_{\vec{p}} \sum_{\pm} \left[ E_{\pm} + \frac{1}{\beta} \left( \ln(1 + e^{-\beta(E_{\pm} + \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(E_{\pm} - \mu)}) \right) \right]$  lautet die gesuchte Ableitung des effektiven Potentials:

$$\frac{\partial}{\partial M} \frac{V_{\text{eff}}}{N} = \frac{\partial}{\partial M} \left[ \frac{M^2 \mathcal{G}}{2\lambda} - \Delta V \right] = \frac{M \mathcal{G}}{\lambda} - \frac{\partial \Delta V}{\partial M}.$$

Mit der Kettenregel folgt

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial M} = \sum_{\pm} \frac{\partial \Delta V}{\partial E_{\pm}} \frac{\partial E_{\pm}}{\partial M},$$

wobei

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial E_{\pm}} = \int_{\vec{p}} \left[ 1 - \sum_{\alpha} \frac{1}{1 + e^{\beta(E_{\pm} + \alpha\mu)}} \right]$$

mit  $\alpha \in \{-1, 1\}$  und

$$\frac{\partial E_{\pm}}{\partial M} = \frac{1}{2E_{\pm}} \left( 2M \pm 2Q \frac{M}{\sqrt{M^2 + p_3^2}} \right) = \frac{M}{E_{\pm}} \left( 1 \pm \frac{Q}{\sqrt{M^2 + p_3^2}} \right)$$

gilt. Insgesamt ergibt sich die Ableitung also zu:

$$\frac{\partial}{\partial M} \frac{V_{\text{eff}}}{N} = M \left[ \frac{\mathcal{G}}{\lambda} - \int_{\vec{p}} \sum_{\pm} \frac{1}{E_{\pm}} \left( 1 \pm \frac{Q}{\sqrt{M^2 + p_3^2}} \right) \left( 1 - \sum_{\alpha} \frac{1}{1 + \exp(\beta(E_{\pm} + \alpha\mu))} \right) \right].$$

---

## Literaturverzeichnis

- [1] J. Braun, S. Finkbeiner, F. Karbstein, and D. Roscher, “On the Search for Inhomogeneous Phases in Fermionic Models,” 2014.
- [2] M. Peskin and D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, ser. Advanced book classics. Addison-Wesley Publishing Company, 1995. [Online]. Available: <http://books.google.de/books?id=i35LALN0GosC>
- [3] T. Kugo and S. Heusler, *Eichtheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. [Online]. Available: <https://books.google.de/books?id=DD3VkwEACAAJ>
- [4] W. Greiner and J. Reinhardt, *Feldquantisierung: ein Lehr- und Übungsbuch : mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen und Aufgaben mit ausführlichen Lösungen*, ser. Theoretische Physik. Deutsch, 1993. [Online]. Available: <https://books.google.de/books?id=t3wTHPYyQEOC>
- [5] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 6: Statistische Physik*, ser. Grundkurs Theoretische Physik. Springer, 2014. [Online]. Available: <https://books.google.de/books?id=4hIeBAAAQBAJ>
- [6] T. Fließbach, *Statistische Physik: Lehrbuch zur Theoretischen Physik IV*, ser. Lehrbuch zur theoretischen Physik. Spektrum Akademischer Verlag, 2010. [Online]. Available: <https://books.google.de/books?id=yykgBAAAQBAJ>
- [7] J. Kapusta and C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications*, ser. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2006. [Online]. Available: <https://books.google.de/books?id=rll8dJ2iTpsC>
- [8] A. Altland and B. Simons, *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, 2010. [Online]. Available: <https://books.google.de/books?id=GpF0Pgo8CqAC>
- [9] D. J. Gross, “Twenty five years of asymptotic freedom,” 1998. [Online]. Available: <http://arxiv.org/pdf/hep-th/9809060v1.pdf>
- [10] V. Koch, “Aspects of chiral symmetry,” *Int.J.Mod.Phys.*, vol. E6, pp. 203–250, 1997.
- [11] M. Buballa, “NJL model analysis of quark matter at large density,” *Phys.Rept.*, vol. 407, pp. 205–376, 2005.
- [12] L. Y. Glozman, “Confinement, chiral symmetry breaking and the mass generation of hadrons,” *Acta Phys.Polon.Supp.*, vol. 6, pp. 245–250, 2013.
- [13] Y. Kim and D. Yi, “Holography at work for nuclear and hadron physics,” *Adv.High Energy Phys.*, vol. 2011, p. 259025, 2011.
- [14] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, ser. Physics textbook. Wiley, 2008. [Online]. Available: <https://books.google.de/books?id=Wb9DYrjcoKAC>
- [15] J.-P. Blaizot, “Theoretical overview: towards understanding the quark-gluon plasma,” *J.Phys.*, vol. G34, pp. S243–252, 2007.
- [16] Z. Fodor and S. Katz, “The Phase diagram of quantum chromodynamics,” 2009.
- [17] J. Braun, L. M. Haas, F. Marhauser, and J. M. Pawłowski, “Phase Structure of Two-Flavor QCD at Finite Chemical Potential,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 106, p. 022002, 2011.
- [18] H. Meyer, “Lattice qcd: A brief introduction,” in *Lattice QCD for Nuclear Physics*, ser. Lecture Notes in Physics, H.-W. Lin and H. B. Meyer, Eds. Springer International Publishing, 2015, vol. 889, pp. 1–34. [Online]. Available: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-08022-2\\_1](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-08022-2_1)

- 
- 
- [19] G. 't Hooft, "Large N," pp. 3–18, 2002.
- [20] A. V. Manohar, "Large N QCD," pp. 1091–1169, 1998.
- [21] M. Moshe and J. Zinn-Justin, "Quantum field theory in the large N limit: A Review," *Phys.Rept.*, vol. 385, pp. 69–228, 2003.
- [22] A. V. Manohar, "Effective field theories," *Lect.Notes Phys.*, vol. 479, pp. 311–362, 1997.
- [23] S. Scherer and M. R. Schindler, "A Chiral perturbation theory primer," 2005.
- [24] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, "Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I," *Physical Review*, vol. 122, pp. 345–358, Apr. 1961.
- [25] M. Stephanov, "QCD phase diagram: An Overview," *PoS*, vol. LAT2006, p. 024, 2006.